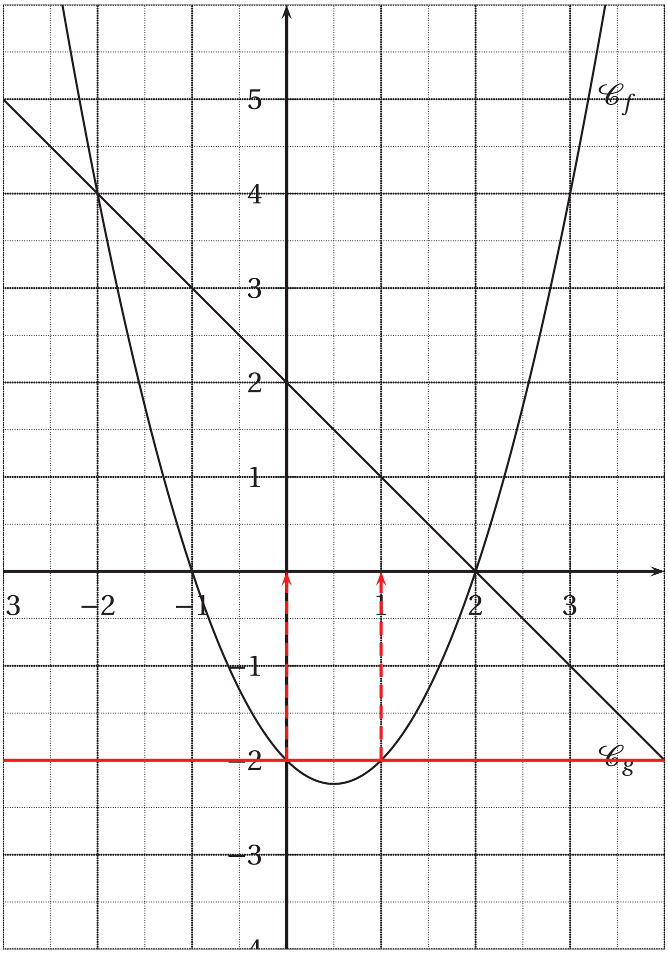
Mathématiques : Devoir commun

Correction

Exercice 1
Partie A : Lectures graphiques



1°) a) D'après le graphique :

$$f(-2) = 4, \qquad f(-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -2.$$

b) D'après le graphique :
– $f(-2) = 4$ et $f(3) = 4$: les antécédents de 4 par f sont -2 et 3 ;
– $f(-1) = 0$ et $f(2) = 0$: les antécédents de 0 par f sont -1 et 2 ;
– -3 n'a aucun antécédent par f.

c) Le minimum de f est -2,25. Il est atteint en $x = 0,5$.

d) RÈsoudre l'équation $f(x) = -2$ revient à déterminer graphiquement les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour ordonnée -2.

L'équation $f(x) = -2$ a pour solutions : 0 et 1

2°) Par lecture graphique, on obtient le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-2,25$	↗

.

3°) A l'aide du tableau de variation de f complété par les antécédents de 0 par f, on déduit le tableau de signes suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

.

4°) RÈsoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer graphiquement les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solutions : -2 et 2

Partie B : Calculs

1°) On a :

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4, \quad f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2.$$

2°) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= -2 \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ x = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 1. \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = -2$ a pour solutions : 0 et 1

3°) a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2) &= x^2 - 2x + x - 2 \\ &= x^2 - x - 2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

b) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x + 1 = 0 \quad &\text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ x = -1 \quad &\text{ou} \quad x = 2. \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ a pour solution : -1 et 2

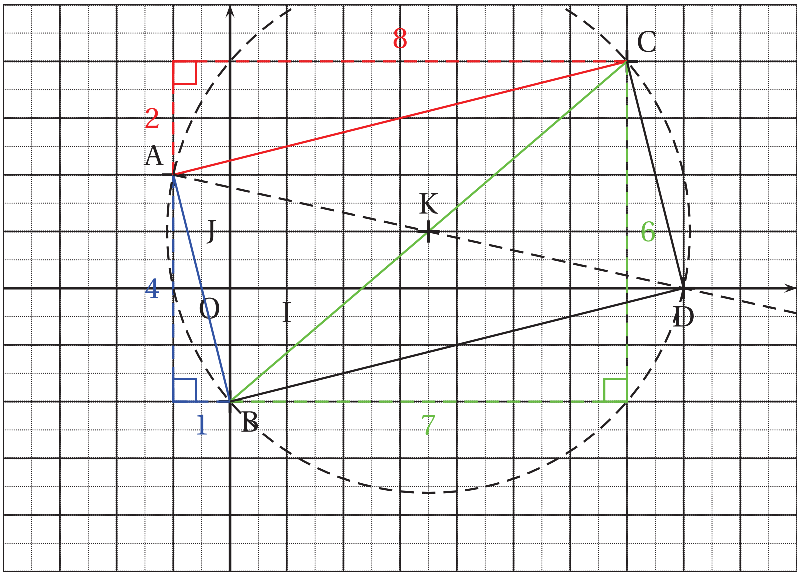
4°) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= -x + 2 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \\ &\dots \\ x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = -2. \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solution : -2 et 2

Exercice 2

1°) *Graphique* :



2°) Les coordonnées $(x_K ; y_K)$ du point K milieu du segment [BC] sont données par :

$$x_K = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2} \qquad \text{et} \qquad y_K = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

3°) D'après le théorème de Pythagore :

$$\text{AB}^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17 \Longrightarrow \text{AB} = \sqrt{17},$$
$$\text{AC}^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68 \Longrightarrow \text{AC} = \sqrt{68},$$
$$\text{BC}^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85 \Longrightarrow \text{BC} = \sqrt{85}.$$

4°) a) Dire que le point D est le symétrique de A par rapport à K signifie que K est le milieu du segment [AD]. Autrement dit, le point D est le point d'intersection de la demi-droite [AK) et du cercle de centre K qui passe par A.

b) Soit $(x_D ; y_D)$ les coordonnées du point D. Puisque K est le milieu de [AD], on a :

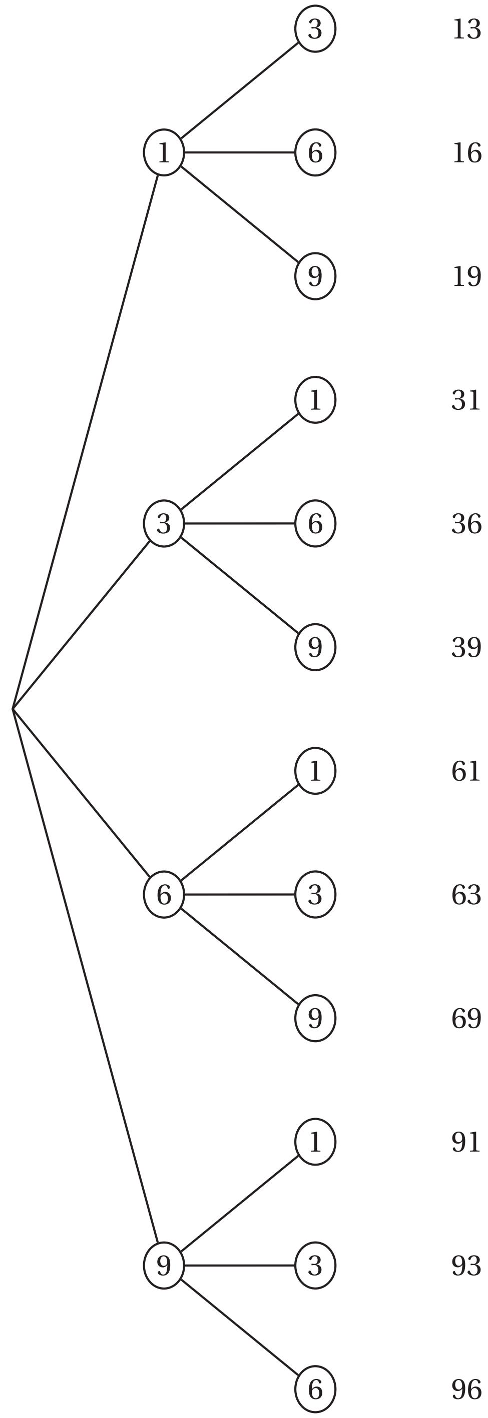
$$\frac{7}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \Longleftrightarrow x_D = 8 \qquad \text{et} \qquad 1 = \frac{2 + y_D}{2} \Longleftrightarrow y_D = 0.$$

Le point D, symétrique de A par rapport à K a pour coordonnées (8; 0).

5°) Les diagonales [AD] et [BC] du quadrilatère ABDC se coupent en leur milieu K : le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.
De plus, $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
Puisque le parallélograme ABDC a un angle droit, c'est un rectangle.

Exercice 3

1°) a) Arbre de dénombrement représentant la situation :



b) D'après l'arbre de dénombrement, l'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\{13; 16; 19; 31; 36; 39; 61; 63; 69; 91; 93; 96\}.$$

Puisque les tirages se font au hasard, les douze issues possibles sont équiprobables.

2°) a) Seuls les 3 cas 16, 36 et 96 sont favorables à l'événement A, d'où :

$$p(\text{A}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Seuls les 6 cas 36, 39, 63, 69, 93 et 96 sont favorables à l'événement B, d'où :

$$p(\text{B}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad p(\overline{\text{B}}) = 1 - p(\text{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) L'événement $A \cap B$ se traduit par la phrase « *le nombre obtenu est pair et multiple de 3* » ou, de manière équivalente, par la phrase « *le nombre obtenu est multiple de 6* ». Seuls les 2 cas 36 et 96 sont favorables à l'événement $A \cap B$, d'où :

$$p(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

c) L'événement $A \cup B$ se traduit par la phrase « *le nombre obtenu est pair ou multiple de 3* » et

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$

Exercice 4

1°) Le prix à payer pour une commande d'un montant de :

- 125€ (150-25) ;
- 75€ est de 65€ (75-10) ;
- 300€ est de 240€ $(300 \times \underbrace{(1 - \frac{20}{100})}_{0,8})$.

2°) Algorithme :

```
Choisir le montant M ⩾ 20 de la commande
Si M < 100 alors
      Afficher « Le prix à payer pour cette commande est : » M − 10
Sinon
     Si M < 200
            Afficher « Le prix à payer pour cette commande est : » M − 25
      Sinon
         Afficher « Le prix à payer pour cette commande est : » M × 0,8
```