Correction du devoir commun de mathématiques

Exercice 1

Partie A. — Lectures graphiques

1. Graphiquement, $f(0) = f(4) = 1$.
2. Graphiquement, les antécédents de -2 par f sont 1 et 3.
3. Les solutions de $f(x) = 0$ sont les antécédents de 0 par f. Graphiquement, on trouve environ 0,3 et 3,7.
4. Les solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = 1$. Graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) < 1$ est donc $]0\,;4[$.
5. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 3$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de la droite d'équation $y = -3$. Graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) \geq 3$ est donc $[-1\,;4]$.
6. Le tableau de variation de f sur D est

x	-1		2		4
f	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

7. Le maximum de f sur D est 6 atteint en $x = -1$ et le minimum de f sur D est -3 atteint en $x = 2$.
8. Le maximum de f sur $[0\,;4]$ est 1 atteint en $x = 0$ et en $x = 4$.

Partie B

1. Soit $x \in D$. Alors, $f(x) = (x-2)^2 - 3 = (x-2)^2 - \sqrt{3}^2 = [(x-2) - \sqrt{3}][(x-2) + \sqrt{3}]$ c'est-à-dire $\boxed{f(x) = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})}$.
2. **a.** Grâce à la question précédente,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x-2-\sqrt{3} = 0 \text{ ou } x-2+\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{3} \text{ ou } x = 2-\sqrt{3}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } \{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}}$.

   b. On ne trouve pas les mêmes résultats que par la méthode graphique mais ils sont du même ordre de grandeur car $2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$ et $2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$. Ceci illustre le fait que la méthode graphique ne permet pas, dans ce cas, d'obtenir des valeurs exactes mais seulement des valeurs approchées des solutions contrairement à la méthode calculatoire. Elle a cependant l'avantage d'être plus simple à mettre en œuvre.
3. Le carré d'un réel étant toujours positif ou nul, pour tout $x \in D$, $(x-2)^2 \geq 0$. Il s'ensuit que, pour tout $x \in D$, $(x-2)^2 - 3 \geq 3$ c'est-à-dire $\boxed{f(x) \geq -3}$.

Exercice 2

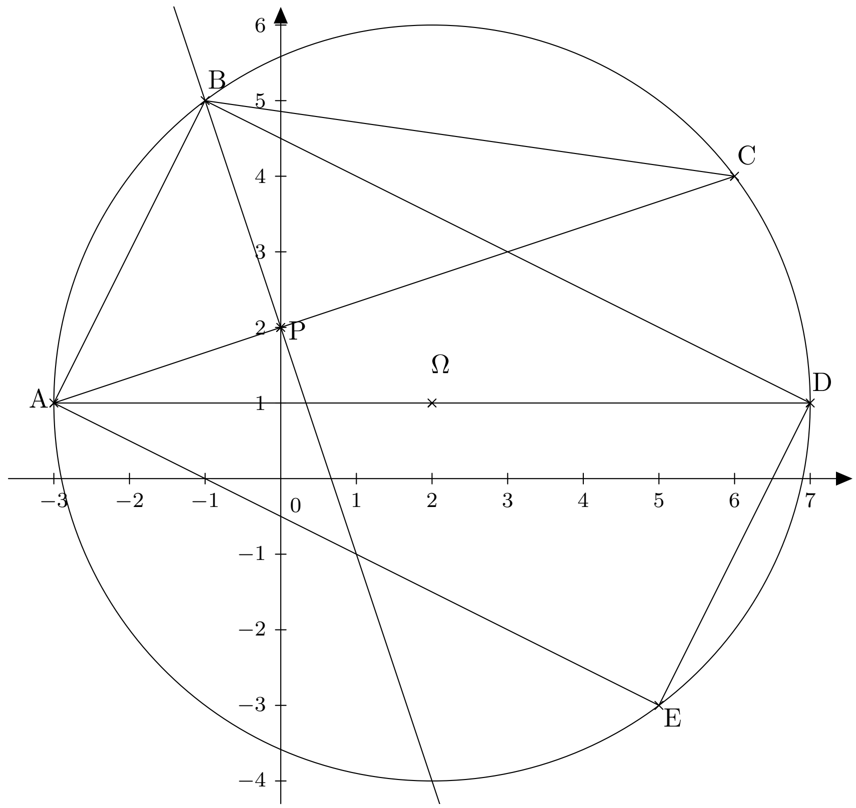
1. Voir ci-dessous
2. Calculons les distances de chacun de ces points à Ω :

$$\Omega\text{A} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\Omega\text{B} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\Omega\text{C} = \sqrt{(2-6)^2 + ((1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

   Ainsi, $\Omega\text{A} = \Omega\text{B} = \Omega\text{C} = 5$ donc les points $\boxed{\text{A, B et C appartiennent au cercle } \mathcal{C} \text{ de centre } \Omega \text{ et de rayon 5}}$.



3. Notons M le milieu de [AD]. Alors, les coordonnées de M sont

$$x_M = \frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{D}}}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{D}}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

On constate que les coordonnées de M sont les mêmes que celles de Ω donc $M = \Omega$ ce qui prouve que le point $\boxed{\Omega \text{ est le milieu de [AD]}}$.

Ainsi, le segment [AD] est le diamètre du cercle $\mathcal{C}$. Comme le triangle ABD est inscrit dans ce cercle, on en déduit que $\boxed{\text{ABD est rectangle en B}}$.

4. **a.** Le quadrilatère ABDE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont $(-3-(-1)\,;1-5)$ c'est-à-dire $(-2\,;-4)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ sont $(x_{\mathrm{E}}-7\,;y_{\mathrm{E}}-1)$. On en déduit que ABDE est un parallélogramme si et seulement si $x_{\mathrm{E}} - 7 = -2$ et $y_{\mathrm{E}} - 1 = -4$ i.e. $x_{\mathrm{E}} = 5$ et $y_{\mathrm{E}} = -3$. Ainsi, $\boxed{\text{les coordonnées de E sont } (5\,;-3)}$.

b. On sait que ABDE est un parallélogramme et que le triangle ABD est rectangle en B donc le parallélogramme $\boxed{\text{ABDE est un rectangle}}$.

5. Montrons que la droite (BP) est la hauteur du triangle ABC issue du sommet B. Pour cela, il suffit de montrer que (BP) est perpendiculaire à (AC) c'est-à-dire que le triangle APB est rectangle en P. Utilisons pour cela la réciproque du théorème de Pythagore.

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(0-(-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad \mathrm{PB} = \sqrt{(-1-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9}\sqrt{10}$$

Ainsi, $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PB}^2 = 10 + 10 = 20$. Or,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

donc $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{PB}^2 = \mathrm{AB}^2$. Ainsi, par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle APB est rectangle en P. Il s'ensuit que $(\mathrm{AP}) \perp (\mathrm{PB})$ et donc $\boxed{\text{(BP) est la hauteur de ABC issue de B}}$.

Exercice 3

Partie A. — QCM

Sujet A. — **1.** A ; **2.** E ; **3.** I ; **4.** J.

Sujet B. — **1.** B ; **2.** C ; **3.** B ; **4.** B.

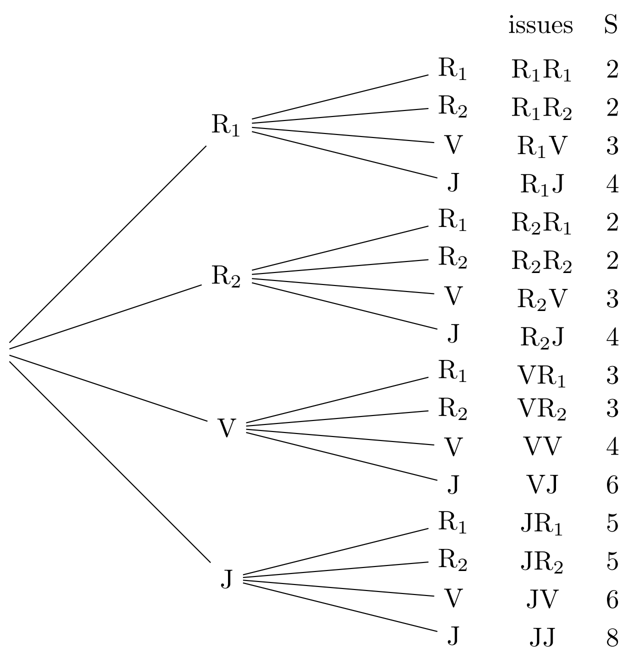
Partie B

1. En faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 4$, on trouve successivement pour q les valeurs $(4+2) \times (4+2) = 36$, $36 - (4+4) = 28$ et $\frac{28}{4+3} = 4$. Ainsi, on obtient 4 en sortie.

   De même, pour $n = 7$, q vaut successivement $(7+2) \times (7+2) = 81$, $81 - (7+4) = 70$ et $\frac{70}{7+3} = 7$. On obtient donc en sortie le nombre 7.
2. On peut conjecturer que l'algorithme affiche en sortie la valeur n saisie en entrée.
3. Soit n un réel différent de -3. Alors, les valeurs successives pour q sont $(n+2)(n+2) = (n+2)^2 = n^2+4n+4$, $n^2+4n+4-(n+4) = n^2+3n$ et $\frac{n^2+3n}{n+3}$. La valeur affichée en sortie est donc $\frac{n^2+3n}{n+3}$. Or, $n^2+3n = n(n+3)$ donc $\frac{n^2+3n}{n+3} = \frac{n(n+3)}{n+3} = n$. La conjecture est ainsi démontrée.

Exercice 4

1.



   On a écrit au bout de chaque branche les 16 issues de cette expérience qui sont toutes équiprobables.
2. Il y a 4 issues qui réalisent l'événement E (R_1R_1, R_1R_2, R_2R_1 et R_2R_2) donc, par équiprobabilité, $\boxed{p(\mathrm{E}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$.

   De même, il y a 8 issues qui réalisent l'événement F (R_1V, R_1J, R_2V, R_2J, VR_2, JR_1, VR_2, JR_2) donc $\boxed{p(\mathrm{F}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}}$.
3. L'événement G est « au moins une des deux boules tirées est rouge ». Par théorème,

$$p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{E}) + p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}).$$

   Or, les événements E et F sont incompatibles car on ne peut avoir à la fois 2 boules rouges et exactement une boule rouge. Ainsi, $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \varnothing$ et donc $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{E}) + p(\mathrm{F}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ soit $\boxed{p(\mathrm{G}) = \frac{3}{4}}$.
4. L'événement H est l'événement contraire (ou complémentaire) de G c'est-à-dire $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{G}}$. On en déduit que $p(\mathrm{H}) = 1 - p(\mathrm{G}) = 1 - \frac{3}{4}$ c'est-à-dire $\boxed{p(\mathrm{H}) = \frac{1}{4}}$.
5. On a inscrit sur l'arbre, à côté de chaque issue, la somme correspondante. On voit qu'il y a 8 issues qui réalisent l'événement « S est supérieure ou égale à 4 » donc la probabilité de cet événement est $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.