Collège J. Daguerre

Devoir commun

Février 2016

Epreuve de Mathématiques

Durée : 2 heures

L’emploi des calculatrices est autorisé.

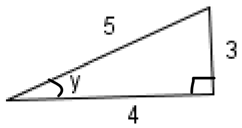
En plus des points prévus pour chaque exercice de l’épreuve, la présentation, la rédaction et l’orthographe seront évaluées.

Le candidat traitera obligatoirement l’ensemble des exercices sur ses propres copies bien présentées.

<u>Exercice 1</u> : **[3 points]**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

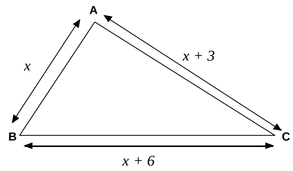
Pour chacune des questions, <u>indiquer sur la copie</u> le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

1)	$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$ est égal à :	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{30}$	$\boxed{1}$
2)	L'écriture scientifique de 65 100 000 est :	651×10^5	$\boxed{6{,}51\times10^7}$	$6{,}51\times10^{-7}$
3)	Si $\boldsymbol{a} = 2^3\times3^4\times5\times7^2$ et $\boldsymbol{b} = 2^7\times3^2\times7\times11^3$ alors le PGCD (***a*** ; ***b***) est:	$2^7\times3^4\times5\times7^3\times11^3$	$2\times3\times5\times7\times11$	$\boxed{2^3\times3^2\times7}$
4)	$\sqrt{16+4}\,est\ égal$ à:	4,472135955	$\sqrt{16}+\sqrt{4}$	$\boxed{\sqrt{20}}$
5)	Pour $x = 2\sqrt{5}$, l'expression x^2+4x+1 est égale à:	$1+12\sqrt{5}$	$11+8\sqrt{5}$	$\boxed{21+8\sqrt{5}}$
6)	 $\frac{3}{5}$ est égal à :	$\boxed{\text{sin y}}$	cos y	tan y

<u>Exercice 2</u> : [3,5 points]

1) Je calcule le PGCD de 405 et 315par l'algorithme d'Euclide :
405 = 1 × 315 + 90
315 = 3 × 90 + **45**
90 = 2 × 45 + 0 Le PGCD est le dernier reste non nul, donc PGCD (405 ; 315) = 45
2) a) Nombre total de bénitiers de 12.5 cm : 35 × 9 = 315
Nombre total de bénitiers de 17.5 cm : 15 × 27 = 405
Il y a le même nombre de bénitiers de 12,5 cm par lots. Donc le nombre de lots divise le nombre total de bénitiers.
De même, le nombre de lots divise le nombre total de bénitiers de 17.5 cm.
Le nombre de lots est donc un diviseur commun à ces deux nombres et on veut le maximum de lots identiques donc le nombre de lots est le PGCD de 405 et 315.
Conclusion : **<u>Le nombre de lots identiques maximum que l'exploitant pourra réaliser est 45.</u>**
b) 315 : 45 = 7 Il y aura 7 bénitiers de 12,5 cm,
405 : 45 = 9 Il y aura 9 bénitiers de 17,5 cm.

Exercice 3 : [5 points]



1) p = AB + AC + BC = $x + (x + 3) + (x + 6)$ = $\boxed{3x + 9}$

2) a)

$3x + 9 = 36$

$3x = 36 - 9$

$x = \dfrac{27}{3}$

$\boxed{x = 9}$.

b) $\begin{cases} AB = 9 \text{ cm} \\ AC = 9 + 3 = 12 \text{ cm} \\ BC = 9 + 6 = 15 \text{ cm} \end{cases}$.

c) Le côté le plus long du triangle ABC est [BC].

$\begin{cases} \mathbf{BC^2} = 15^2 = \mathbf{225} \\ \mathbf{AB^2 + AC^2} = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = \mathbf{225} \end{cases}$.

On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC **est rectangle en A**.

d) Le triangle ABC est rectangle en A. $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$

$\widehat{ABC} = \arccos(0{,}6) \approx \boxed{53°}$.

Exercice 4 : [**3,5 points**]

1) a) $\dfrac{78 \times 10^{10}}{65 \times 10^{8}} = \dfrac{13\times6}{13\times5} \times 10^{10-8} = 1{,}2\times10^2 = \mathbf{120}$.

En moyenne, un habitant de la planète a utilisé 120 sacs en plastique en 2012.

b) Ce nombre est *beaucoup moins important* que le nombre moyen de sacs en plastique utilisés en France.

2) $350 \times 61 \times 10^6 = 35\times10^1 \times 61\times10^6 = 2\,135 \times 10^{1+6} = 2{,}135\times10^3\times10^7 = \mathbf{2{,}135\times10^{10}}$.

Vingt-et-un milliards-trois-cent-cinquante-millions de sacs ont été utilisés en France en 2012.

Exercice 5: [**5,5 points**]

- choisir un nombre de départ
- ajouter 8
- multiplier la somme par le nombre de départ
- Ajouter 16 au résultat
- écrire le résultat obtenu.

1. a) $\mathbf{2} \xrightarrow{+8} 10 \xrightarrow{\times x} 20 \xrightarrow{+16} \mathbf{36}$

b) $\mathbf{3} \xrightarrow{+8} 11 \xrightarrow{\times x} 33 \xrightarrow{+16} \mathbf{49}$

2. *L'évaluation de cette question tiendra compte des observations et des étapes de recherche, même incomplètes ; les faire apparaître sur la copie*.

a) Appliquons le programme de calcul à un nombre entier n : $(n + 8)\times n + 16$.
En développant, on obtient : $n^2 + 8n + 16$.
En factorisant, on obtient : $(n + 4)^2$ qui est bien le carré d'un nombre entier.

Amel a raison.

b) On résout l'équation $(n + 4)^2 = 25$.
Les nombres qui ont pour carré 25 sont -5 et 5 d'où : $\begin{cases} n + 4 = -5 \\ n + 4 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} n = -9 \\ n = 1 \end{cases}$

Vérification : $1 \xrightarrow{+8} 9 \xrightarrow{\times x} 9 \xrightarrow{+16} 25$

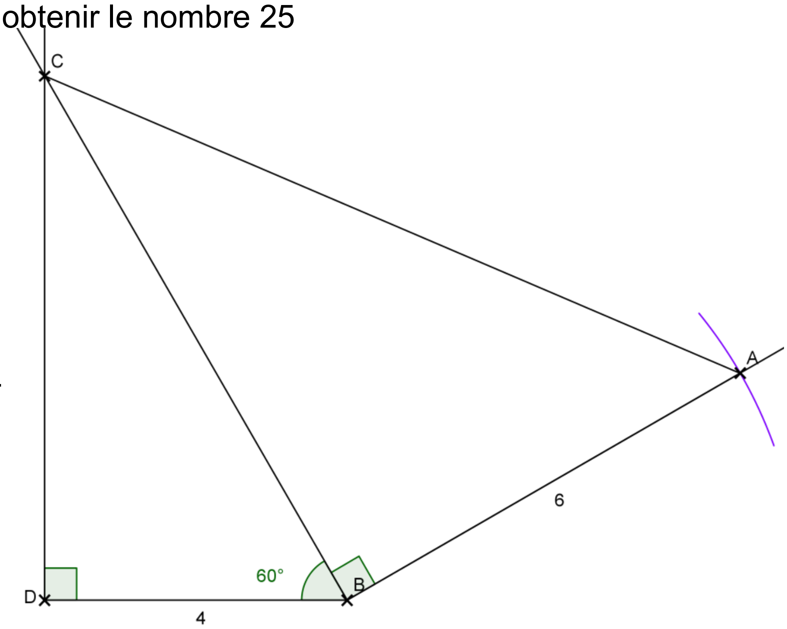
$-9 \xrightarrow{+8} -1 \xrightarrow{\times x} 9 \xrightarrow{+16} 25$

Les nombres 1 et -9 permettent d'obtenir le nombre 25

<u>Exercice 6</u> : [6,5 points]

On donne BD = 4 cm ;
BA = 6 cm et $\widehat{DBC} = 60°$.

1. Reproduire la figure en vraie grandeur



2. Le triangle BCD est rectangle en D.
Je connais la mesure de [BD], côté adjacent de $\widehat{CBD}$, et je cherche la mesure de [BC], hypoténuse du triangle. Donc, j'utilise la formule du cosinus.

$$\cos \widehat{CBD} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{CBD}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BD}{BC}$$

$$\cos(60°) = \frac{4}{BC}$$

D'où $BC = \frac{4}{\cos(60°)} = \frac{4}{0{,}5} = \boxed{8}$. [BC] mesure 8 cm.

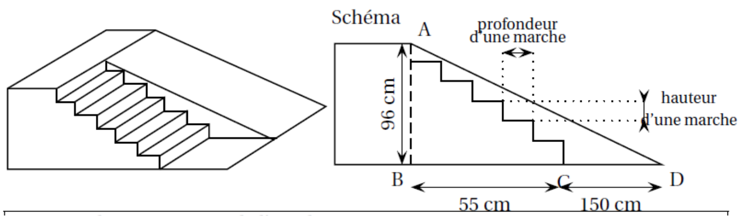
3. Le triangle BCD est rectangle en B, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = BD^2 + CD^2$
$8^2 = 4^2 + CD^2$
$64 = 16 + CD^2$ d'où $CD^2 = 64 - 16 = 48$.
$CD = \sqrt{48} \approx \boxed{6{,}9}$. [CD] mesure 6,9 cm (arrondi au dixième).

4. Le triangle ABC est rectangle en D, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
d'où $AC = \sqrt{100} = \boxed{10}$. [AC] mesure 10 cm.

5. Le triangle ABC est rectangle en D, donc $\tan \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à } \widehat{BAC}} = \frac{BC}{BA} = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$

6. On utilise la calculatrice : $\widehat{BAC}$ = arctan (4 : 3) ≈ $\boxed{53{,}1°}$.

Exercice 7 : [5 points]



1) On calcule 2*h* + *p*, pour cela on commence par calculer la hauteur et la largeur d'une marche :
Il y a 6 marches identiques pour une hauteur totale de 96 cm, on a donc *h* = 96 : 6 = 16.
Il y a 5 marches identiques pour une profondeur totale de 55 cm, on a donc *p* = 55 : 5 = 11.
Donc 2*h* + *p* = 2 × 16 + 11 = 43
Les normes de construction de l'escalier sont respectées.

2) On suppose que le mur est perpendiculaire au sol donc que ABD est rectangle en B.
D'après le
théorème de Pythagore, on a :
$AD^2 = AB^2 + BD^2$
$= 96^2 + (55 + 150)^2$
$= 96^2 + 205^2$
= 51 241
d'où $AD = \sqrt{51\ 241}$
AD = 226*cm*
La longueur du plan incliné demandé est conforme à la demande des habitués.

On calcule la mesure de l'angle *ADB* d à l'aide de la trigonométrie :
$\tan \widehat{ADB} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{96}{205}$
d'où $\widehat{ADB} \approx 25°$ (arctan $(\dfrac{96}{205})$)
L'angle formé par le plan incliné est conforme à la demande des habitués.

Exercice 8 : [4 points]

Année	SMIC
2011	9,40
2010	9,00
2009	8,82
2008	8,63
2007	8,44
2006	**8,27**
2005	8,03
2004	7,61
2003	7,19
2002	6,83
2001	6,67

médiane

1. $E = SMIC_{max} - SMIC_{min} = 9{,}40 - 6{,}67 = 2{,}73$.
   Le SMIC horaire brut a augmenté de 2,73 € de 2001 à 2011.
2. La médiane est la valeur qui partage une série ordonnée en deux groupes de même effectif. Il y a 11 valeurs dans cette série donc la médiane est donnée par la 6ème valeur :
   $\boxed{m_e = 8{,}27}$.
3. Pourcentage d'augmentation en 2002 : $\dfrac{0{,}16}{6{,}67} \times 100 \approx \boxed{2{,}40\ \%}$.

   Pourcentage d'augmentation en 2008 : $\dfrac{0{,}19}{8{,}44} \times 100 \approx \boxed{2{,}25\ \%}$.

   Paul a tort car le pourcentage d'augmentation a été plus élevé en 2002 qu'en 2008.