Baccalauréat Première Métropole-La Réunion
série générale e3c Corrigé du n° 3 année 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1 **5 points**

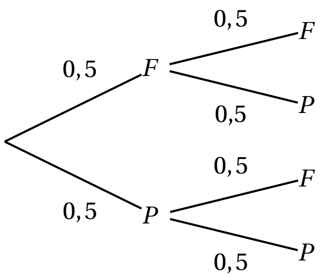
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.
Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

Question 1

On lance deux fois une pièce équilibrée, de manières identiques et indépendantes.
Si le joueur obtient 2 Faces, il perd 5 €, s'il obtient exactement une Face, il gagne 2 €, s'il obtient 2 Piles il gagne 4 €.
On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur, en euros.

a. $E(G) = 0,75$	**b.** $E(G) = 3$	**c.** $E(G) = 1$	**d.** $E(G) = -4$

On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



On en déduit le tableau de la loi de G :

Tirage	FF	FP	PF	PP
$P(G=)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
G	-5	$+2$	$+2$	$+4$

On a donc $E(G) = \frac{1}{4} \times (-5) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} \times (-5+2+2+4) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Question 2

A et B sont deux évènements, et on donne $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{3}{20}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{7}$.

a. A et B sont indépendants.	**b.** $P_A(B) = \frac{3}{980}$	**c.** $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$	**d.** $P_A(B) = \frac{1}{60}$

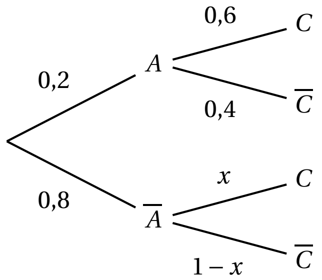
On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, soit
$\frac{4}{7} = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - P(A \cap B)$, d'où :
$P(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - \frac{4}{7} = \frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{21}{140} - \frac{20}{140} = \frac{1}{140}$.

- On a $P(A) \times P(B) = \frac{9}{140}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{140} \times \frac{7}{3} = \frac{1}{60}$.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$.

- $P_A(B) = \dfrac{1}{60}$!

Question 3

On donne l'arbre de probabilités ci-dessous, ainsi que la probabilité $P(C) = 0,48$.



a. $x = 0,6$	**b.** $x = 0,36$	**c.** $x = 0,45$	**d.** $x = \dfrac{0,48}{0,12}$

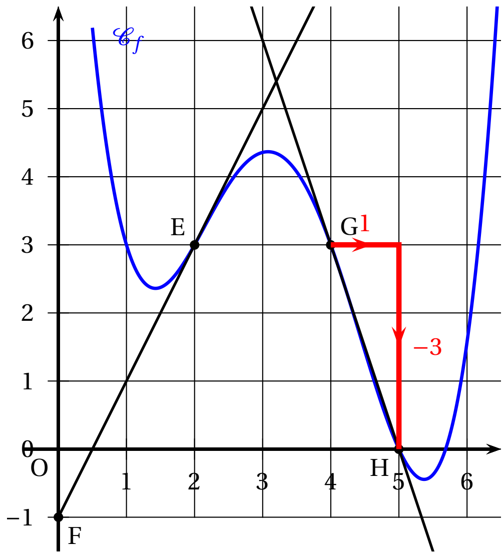
D'après la loi des probabilités totales :
$P(C) = P(A \cap C) + P\left(\overline{A} \cap C\right) = 0,2 \times 0,6 + 0,8 \times x = 0,48.$

Donc $0,12 + 0,8x = 0,48$ ou $0,8x = 0,36$, puis $80x = 36$ et enfin $x = \dfrac{36}{80} = \dfrac{9}{20} = \dfrac{45}{100} = 0,45$.

Question 4

On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé, ainsi que deux de ses tangentes, au point E d'abscisse 2 et au point G d'abscisse 4.

Les coordonnées des points E, F, G, H placés dans le repère ci-contre peuvent être lues graphiquement, ce sont des entiers.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E est la droite (EF).
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point G est la droite (GH).
On note f' la fonction dérivée de f.



a. $f'(2) = 4$	**b.** $f'(2) = 3$	**c.** $f'(4) = 3$	**d.** $f'(4) = -3$

$f'(4) = -3$: voir sur le dessin en rouge la pente de (GH).

Question 5

On considère la fonction Python suivante :

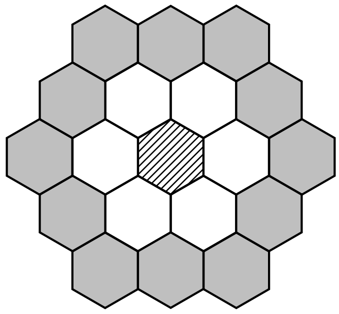
```
def evolu(k) :
    i = 200
    n = 0
    while i < k :
        i = 1.2 * i + 10
        n = n + 1
    return n
```

a. $evolu(500) = 4$	**b.** $evolu(600) = 5$	**c.** $evolu(300) = 3$	**d.** $evolu(400) = 4$

On a $evolu(500) = 4$.

Exercice 2 **5 points**

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :



- à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.

On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 1$).
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?

   Ona $u_3 = 18$.
2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n.

   On a $u_n = 6n$.
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?

   Avec $u_4 = 6 \times 4 = 24$ et $u_5 = 6 \times 5 = 30$, on a donc ajouté $30 - 24 = 6$ carreaux pour faire l'étape 5.

   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?

   Il a posé en tout :

   $1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 = 91$ carreaux.
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.

   $S_n = 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 + \ldots 6 \times n = 6 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots n)$.

   Or $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ que l'on peut écrire

   $T_n = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$ et en sommant membre à membre :

   $2T_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$.

   Donc $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et par suite $S_n = 6 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n$.
5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.

   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2 977e carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

   On a donc $3n^2 + 3n + 1 = 2\,977$. Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3n^2 + 3n - 2\,976 = 0$ ou en simplifiant par 3 : $n^2 + n - 992 = 0$.

   On a $\Delta = 1 + 4 \times 992 = 1 + 3968 = 3969 = 63^2$.

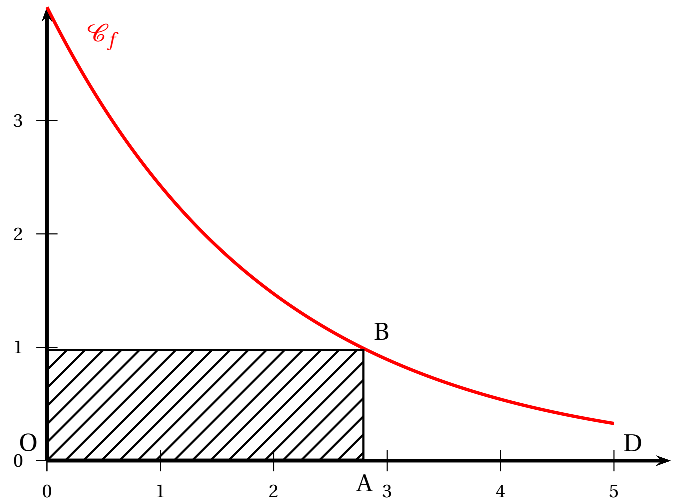
   Les solutions sont donc $n_1 = \dfrac{-1 + 63}{2} = 31$ et $n_2 = \dfrac{-1 - 63}{2} = -32$.

   On ne retient que la solution 31. L'artisan a donc fait 31 étapes.

Exercice 3 **5 points**

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x}.$$



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de $\mathscr{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5;0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0;5]$.
Pour $x \in [0~;~5]$, on a OA $= x$ et OC $= f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x}$. On a donc $\mathscr{A}(\text{OABC}) = x \times f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

2. La fonction g est dérivable sur $[0;5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$, on a $g'(x) = (4-2x)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Pour $x \in [0~;~5]$, on a $g'(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x} + 4x\mathrm{e}^{-0,5x} \times (-0,5) = 4\mathrm{e}^{-0,5x} - 2x\mathrm{e}^{-0,5x} = (4-2x)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

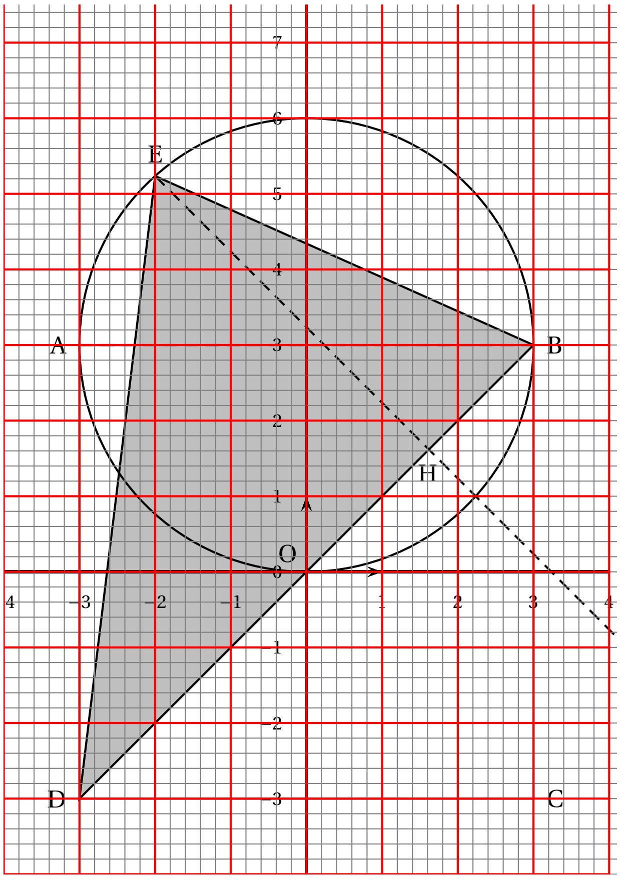
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0;5]$.
On sait que quel que soit le réel a, $\mathrm{e}^a > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $4-2x$.

- $4-2x > 0 \iff 4 > 2x \iff x < 2$; sur l'intervalle $[0;2]$, la dérivée est positive, donc la fonction g est croissante de $g(0) = 0$ à $g(2) = 8\mathrm{e}^{-1} \approx 2,943$;
- $4-2x < 0 \iff 4 < 2x \iff x > 2$; sur l'intervalle $[2;5]$, la dérivée est négative, donc la fonction g est décroissante de $g(2) = 8\mathrm{e}^{-1}$ à $g(5) = 20\mathrm{e}^{-2,5} \approx 1,642$;
- $4-2x = 0 \iff 4 = 2x \iff x = 2$; $g(2) \approx 2,943$ est le maximum de la fonction sur l'intervalle $[2;5]$.

4. Où doit-on placer le point A sur [OD] pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.
D'après la question précédente l'enclos aura une surface maximale pour $x = 2$ et on avu que $g(2) \approx 2,943$, soit 2,94 m^2 au dm^2 près.

Exercice 4 **5 points**

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-contre dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne les coordonnées des sommets du carré :
A$(-3\ ;\ 3)$, B$(3\ ;\ 3)$, C$(3\ ;\ -3)$, D$(-3\ ;\ -3)$.
On considère le point E$\left(-2\ ;\ 3+\sqrt{5}\right)$.
On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre [AB].
On note I le milieu de [AB].



1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre [AB].

- Équation de (BD) = B et D sont deux points dont les coordonnées sont égales : uné équation de la droite (BD) est donc$y = x$.
- Équation du cercle C de diamètre [AB] donc de centre I$(0;3)$.
$M(x\ ;\ y) inC \iff \text{I}M^2 = 3^2 \iff (x-0)^2+(y-3)^2 = 9 \iff x^2+y^2-6y = 0$.

2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne

$$x+y-\left(1+\sqrt{5}\right)=0.$$

$M(x\ ;\ y) \in (\text{EH}) \iff \overrightarrow{\text{E}M}$ et $\overrightarrow{\text{DB}}$ sont orthogonaux donc si $\overrightarrow{\text{E}M}\cdot\overrightarrow{\text{DB}} = 0$.
Avec $\overrightarrow{\text{E}M}\binom{x-(-2)}{y-\left(3+\sqrt{5}\right)}$ et $\overrightarrow{\text{DB}}\binom{3-(-3)}{3-(-3)}$, on a donc :
$\overrightarrow{\text{E}M}\cdot\overrightarrow{\text{DB}} = 6(x+2)+6(y-3-\sqrt{5}) = 0 \iff x+2+y-3-\sqrt{5} = 0 \iff x+y-\left(1+\sqrt{5}\right) = 0$.

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).
H est le point commun aux droites perpendiculaires (EH) et (BD) ; ses coordonnées x et y vérifient donc les équations de ces deux droites, donc le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-\left(1+\sqrt{5}\right) & = & 0\\ -x+y & = & 0\end{array}\right.$ d'où par somme
$2y = 1+\sqrt{5} \iff y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et puisque $x = y$, H$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).

- BD $= 6\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 6) ;
- $\overrightarrow{\text{EH}}\left(\begin{array}{c}\frac{1+\sqrt{5}}{2}-(-2)\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(3+\sqrt{5}\right)\end{array}\right)$, soit $\overrightarrow{\text{EH}}\left(\begin{array}{c}\frac{5+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{-5}{2}\end{array}\right)$.
Donc $\text{EH}^2 = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-5}{2}\right)^2 = \dfrac{25+5+10\sqrt{5}+25}{4} = \dfrac{55+10\sqrt{5}}{4}$.

Donc $\text{EH} = \dfrac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}$.

Finalement : $\mathscr{A}(\text{BDE}) = \dfrac{\text{DB} \times \text{EH}}{2} = \dfrac{6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \times \sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2} \approx 18,7$ unités d'aire.

5. Montrer que $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = 42 + 6\sqrt{5}$.

On admet que $\left\|\overrightarrow{\text{DE}}\right\| = \sqrt{42+12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{\text{BDE}}$ au degré près.

On a $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = \overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DH}}$.

Avec $\overrightarrow{\text{DH}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}+3 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}+3 \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{\text{DH}} \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{7+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

D'où on calcule $\text{DH}^2 = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{49+5+14\sqrt{5}+49+5+14\sqrt{5}}{4} = \frac{108+28\sqrt{5}}{4}$.

Donc $\text{DH} = \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2}$.

Finalement : $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = 6\sqrt{2} \times \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \times \sqrt{2} = 6\left(7+\sqrt{5}\right) = 42 + 6\sqrt{5}$.

On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}} = \left\|\overrightarrow{\text{DB}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\text{DE}}\right\| \times \cos\widehat{\text{BDE}}$ ou

$42 + 6\sqrt{5} = 6\sqrt{2} \times \sqrt{42+12\sqrt{5}} \times \cos\widehat{\text{BDE}} \iff \cos\widehat{\text{BDE}} = \dfrac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{42+12\sqrt{5}}} \approx 0,787$.

La calculatrice donne $\widehat{\text{BDE}} \approx 38,1$, soit 38°au degré près.