∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 58 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 points**

1. Pour tout réel x, $e^{2x}+e^{4x}$ est égal à
   $e^{2x}+e^{4x}=e^{2x}\left(1+e^{2x}\right)$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}(4\,;\,10)$ et la droite (d) d'équation : $5x+2y+3=0$.

   On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5\times4+2\times10=-20+20=0$:les vecteurs sont orthogonaux.

3. La dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^{-x}$ est :
   f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et ur cet intervalle :
   $f'(x)=2e^{-x}-(2x-1)e^{-x}=e^{-x}(2-2x+1)=(-2x+3)e^{-x}$.

4. Pour tout réel x, on a $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$.
   Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A. On lit $f'(0)=\dfrac{-5}{1}=-5$.

EXERCICE 2 **5 points**

La population d'une ville A augmente chaque année de 2 %. La ville A avait 4 600 habitants en 2010.
La population d'une ville B augmente de 110 habitants par année. La ville B avait 5 100 habitants en 2010.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année $2010+n$.

1. Augmenter de 2 % revient à multiplier par $1+\dfrac{2}{100}=1+0,02=1,02$. Donc :

   $u_1=4\,600\times1,02=4692$ (habitants en 2011 dans la ville A).

   $v_1=5\,100+110=5210$ (habitants en 2011 dans la ville B).

2. Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ?

   On a pour tout naturel n, $u_{n+1}=1,02u_n$: la suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,02, de premier terme $u_0=4\,600$.

   On a pour tout naturel n, $v_{n+1}=u_n+110$: la suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison 110, de premier terme $u_0=5\,100$.

3. On sait que pour tout naturel n, $u_n=4\,600\times1,02^{n-1}$.

   Pour $n=10$, $u_{10}=4\,600\times1,02^{10-1}=4\,600\times1,02^9\approx5\,497$.

4. On sait que pour tout naturel n, $v_n=5\,100+110n$.

   Pour $n=10$, $v_{10}=5\,100+110\times10=5\,100+1\,110=6\,210$.

5.

```
def année () :
  u =4 600
  v =5 100
  n =0
  while u < v :
    u = u*1,02
    v = v+110
    n = n+1
return n
```

EXERCICE 3 **5 points**

Soit h la fonction définie sur $[-6~;~26]$ par :

$$h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490.$$

1. $h(x)$ est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-6~;~26]$ et sur cet intervalle :

$h'(x) = -3x^2 + 2 \times 30x - 108 = -3x^2 + 60x - 108.$

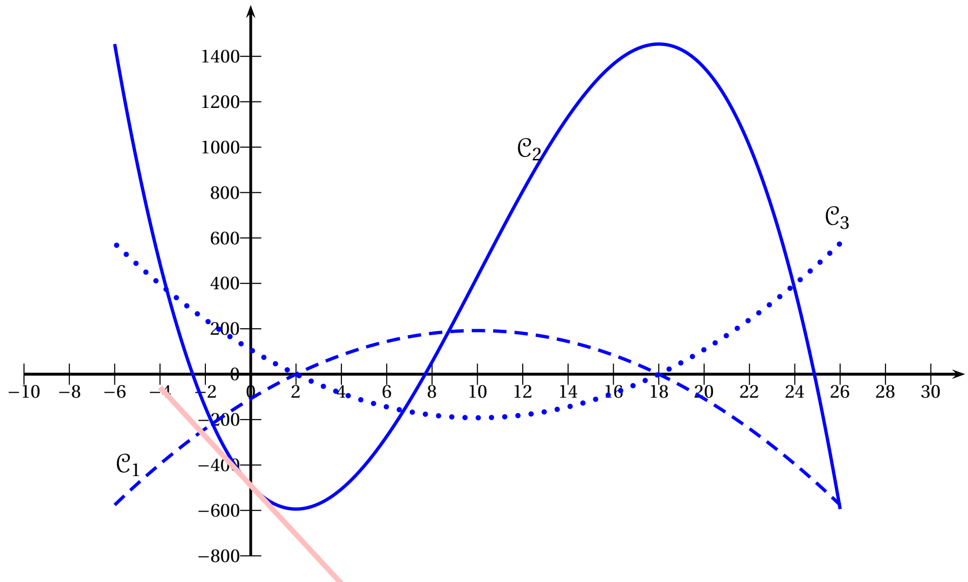
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{C}'$ celle de h'.

a. $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique d'une fonction trinôme : c'est donc une parabole tournée vers le bas : c'est donc $\mathcal{C}_1$.

Comme $h'(x) \geqslant 0$ sur $[2~;~18]$, h est croissante sur cet intervalle et sa représentation n'est pas $\mathcal{C}_3$; c'est donc $\mathcal{C}_2$.

b. $h'(x) = -3\left(x^2 - 20x + 36\right) = -3\left[(x-10)^2 - 100 + 36\right] = -3\left[(x-10)^2 - 64\right] = -3\left[(x-10)^2 - 8^2\right] = -3(x - 10 + 8)(x - 10 - 8) = -3(x-2)(x-18).$

$h'(x) = 0$ pour $x = 2$ et $x = 18$, mais $h(10) = -3 \times 8 \times (-8) = +252$: c'est donc $\mathcal{C}_1$.



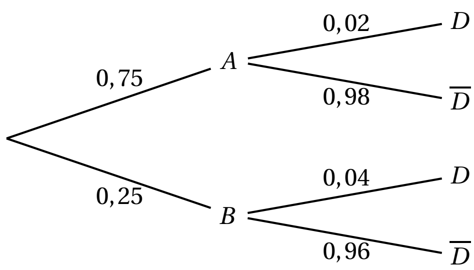
3. $M(x~;~y) \in \mathcal{T} \iff y - h(0) = h'(0)(x - 0) \iff y - (-490) = -108x \iff y = -108x - 490$

4. On a vu que $h'(x) = -3(x-2)(x-18)$: ce trinôme est négatif sauf entre les racines 2 et 18.

La fonction h est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[2~;~18]$ où elle est croissante.

L'intervalle d'études a été changé car les graphiques ne correspondaient pas aux intervalles donnés $[0~;~26]$ *ou* $[0~;~30]$

EXERCICE 4 **5 points**



1. $p(A) = \dfrac{3}{4} = 0,75$.
2. Voir ci-dessus.
3. Il faut calculer $p(D \cap A) = p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. On a aussi $p\left(D \cap B\right) = p\left(B \cap D\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p_B(D) = 0,25 \times 0,04 = 0,01$.
   D'après la loi des probabilités totales $p(D) = p(D \cap A) + p\left(D \cap B\right) = 0,015 + 0,01 = 0,025$.
5. Il faut calculer $p_D(A) = \dfrac{p(D \cap A}{p(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = \dfrac{15}{25} = 0,6$.