Baccalauréat Première Métropole-La Réunion
série générale e3c Corrigé du n° 9 année 2020

Exercice 1 **5 points**

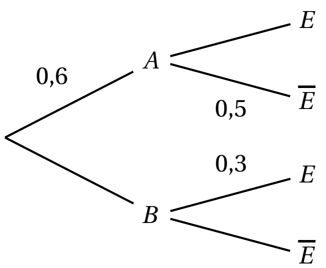
Ce QCM comprend 5 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des affirmations proposées est exacte.
Indiquer pour chaque question sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire de point.

Question 1
On choisit au hasard un individu parmi les passagers en transit dans un aéroport. On a représenté ci-dessous un arbre de probabilités lié à certains évènements dont certains éléments ont été effacés.
On considère les évènements suivants :

— A : « le passager parle anglais »

— B : « le passager ne parle pas anglais »

— E : « le passager est un membre de l'Union Européenne »



a. $P_B(E) = 0{,}12$	**b.** $p(E) = 0{,}42$	**c.** La probabilité que le passager choisi soit européen et ne parle pas anglais est 0,3	**d.** $P(A \cup B) = 1{,}1$

- On a $P_B(E) = 0{,}3$ (énoncé) ;
- $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}3 + 0{,}12 = 0{,}42$.

Question 2
Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit D la droite d'équation $3x + y - 2 = 0$.

a. Le point de coordonnées $(6\,;\,-15)$ appartient à D	**b.** D est perpendiculaire à la droite d'équation $12x + 4y = 0$	**c.** Le vecteur de coordonnées $(1\,;\,3)$ est un vecteur directeur de D.	**d.** Le vecteur de coordonnées $(3\,;\,1)$ est un vecteur directeur des droites perpendiculaires à D.

- On a $3 \times 6 - 15 - 2 = 0$:faux;
- On a $3 \times 12 + 1 \times 4 = 0$: faux;
- $\overrightarrow{u}\binom{1}{3}$ n'est pas vecteur directeur de D;
- La dernière affirmation est vraie.

Question 3 On considère dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique $\sin x = 1$.

a. Cette équation admet une unique solution dans l'ensemble des réels	**b.** Cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des réels	**c.** 2π est une solution de cette équation	**d.** $-\dfrac{57\pi}{2}$ est une solution de cette équation

Cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des réels : tous les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Question 4

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La courbe $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente au point d'abscisse 0	**b.** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 pour équation $y = 2x$	**c.** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1	**d.** La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2 1 \geqslant 1 > 0$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

- L'information a. est donc fausse;
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ est :

$y - 0 = 2(x-0)$, soit $y = 2x$: vraie.

Question 5

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

f est dérivable sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-2\,;\,+\infty[$, on a :

a. $f'(x) = 1$	**b.** $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$	**c.** $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$	**d.** $f'(x) = 2x-1$

Sur $]-2\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

Exercice 2 **5 points**

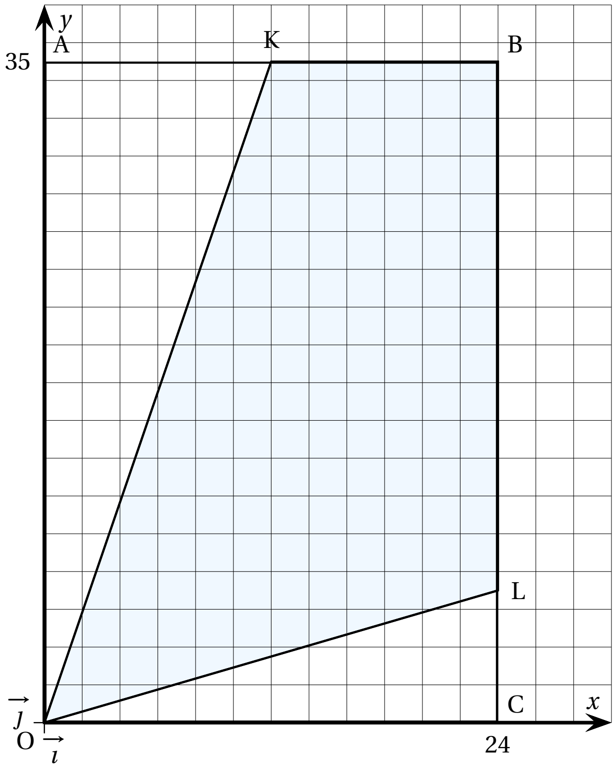
À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5 000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque :

Offre
Intérêts composés au taux annuel constant de 3 %. À la fin de chaque année le capital produit 3 % d'intérêts qui sont intégrés au capital.

On considère que l'évolution du capital acquis, en euro, peut être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après la naissance de Lisa.
On a ainsi $u_0 = 5000$.

1. Montrer que $u_1 = 5150$ et $u_2 = 5304{,}5$.
   Ajouter 3 % d'intérêts c'est multiplier par $1 + 0{,}03 = 1{,}03$, donc :
   - $u_1 = 5000 \times 1{,}03 = 5150$;
   - $u_2 = 5150 \times 1{,}03 = 5304{,}50$ (€).
2. **a.** Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.
   On a vu que $u_{n+1} = 1{,}03u_n$: la suite (u_n) est donc géométrique de raison 1,03 et de premier terme 5 000.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   On sait que $u_n = 5000 \times 1{,}03^n$.



3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.
   On a $u_{18} = 5\,000 \times 1{,}03^{18} \approx 8\,512{,}17$ (€).
4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10 000 euros ?
   Il faut donc trouver n tel que :
   $5\,000 \times 1{,}03^n \geqslant 10\,000 \iff 1{,}03^n \geqslant 2$.
   La calculatrice donne $n \geqslant 23$. Lisa aura 23 ans lorsque son capital aura doublé.

Exercice 3 **5 points**

Le rectangle OABC ci-dessous représente une place touristique vue de dessus. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tel que $\overrightarrow{\text{OC}} = 24\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\text{OA}} = 35\vec{\jmath}$.
Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O, un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite [OK] et [OL] tels que K est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{\text{CL}} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{\text{CB}}$.

1. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C, K et L.
   A(0 ; 35), B(24 ; 35), C(24 ; 0), K(12 ; 35) et L(24 ; 7).
2. Un visiteur affirme : « Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée ».
   Cette affirmation est-elle exacte ?
   Aire(éclairée) = aire OCBA) - aire(OCL) - aire OKA) $= 24 \times 35 - \dfrac{1}{2} \times 24 \times 7 - \dfrac{1}{2} \times 12 \times 35 = 24 \times 35 - 12 \times 7 - 6 \times 35 = 840 - 84 - 210 = 840 - 294 = 456$ (u. a.)
   Or $\dfrac{456}{840} = \dfrac{19}{35} \approx 0{,}54$: à peu près 54 % de la place est éclairée. L'affirmation est exacte.
3. **a.** Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{OK}}$ et $\overrightarrow{\text{OL}}$.
   On a $\overrightarrow{\text{OK}}\binom{12}{35}$ et $\overrightarrow{\text{OL}}\binom{24}{7}$.

   b. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}}$ est égal à 533.
   On a donc $\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}} = 12 \times 24 + 35 \times 7 = 288 + 245 = 533$.

   c. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{\text{KOL}}$.
   On sait que l'on a aussi : $\overrightarrow{\text{OK}} \cdot \overrightarrow{\text{OL}} = \text{OK} \times \text{OL} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{OK}} ; \overrightarrow{\text{OL}}\right)$ (1). Avec :

• $OK = \sqrt{12^2+35^2} = \sqrt{144+1225} = \sqrt{1369} = 37$;
• $OL = \sqrt{24^2+7^2} = \sqrt{576+49} = \sqrt{625} = 25$;
L'égalité (1) devient :
$533 = 37 \times 25 \times \cos\left(\overrightarrow{OK}\ ;\ \overrightarrow{OL}\right)$, d'où
$\cos\left(\overrightarrow{OK}\ ;\ \overrightarrow{OL}\right) = \dfrac{533}{37\times 25} = \dfrac{533}{925}$.
La calculatrice donne $\left(\overrightarrow{OK}\ ;\ \overrightarrow{OL}\right) \approx 54{,}81$ soit 55° au degré près.

Exercice 4 **5 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$.
La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\ ;\ +\infty[$:
$f'(x) = 3x^2-2x-1 = 3\left(x^2-\dfrac{2}{3}x\right)-1 = 3\left[\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}\right]-1 = 3\left[\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{9}\right] =$
$3\left(x-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\right) = 3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Comme pour $x \geqslant 0$, $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$, donc
- si $0 \leqslant x < 1$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $[0 ; 1[$;
- si $x > 1$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$;
- $f(1) = 1-1-1-1 = -2$ est le minimum de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Déterminer l'abscisse du point de la courbe représentative de f pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7.
Il faut trouver le nombre réel x de $[0\ ;\ +\infty[$ tel que
$f'(x) = 7 \iff 3x^2-2x-1 = 7 \iff 3x^2-2x-8 = 0$.
$\Delta = 4+4\times 3\times 8 = 4+96 = 100 = 10^2 > 0$.
Cette équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{2+10}{6} = 2$ et $\dfrac{2-10}{6} = -\dfrac{4}{3}$.
Seule la première solution est positive, donc $f'(2) = 7$.

2. On note x_0 l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. On admet que $x_0 \in [1\ ;\ 2]$.
On considère la fonction suivante définie en langage Python.

```python
def zero_de_f(n) :
a = 1
b = 2
for k in range(n) :
  x = (a + b)/2
  if x**3 - x**2 - x - 1 < 0 :
    a = x
  else :
    b = x
return a, b
```

a. On applique cette fonction pour $n = 3$. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Itération	$x = \dfrac{a+b}{2}$	$f(x) < 0$?	a	b	Amplitude de $[a\ ;\ b]$
$k = 0$	1,5	OUI	1,5	2	0,5
$k = 1$	1,75	OUI	1,75	2	0,25
$k = 2$	1,875	NON	1,75	1,875	0,125

b. En déduire un encadrement de x_0, d'amplitude 0,125, par deux nombres décimaux.
On a donc $1{,}75 < x_0 < 1{,}875$.