Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 + 14\,x + 1$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = 14$ et $c = 1$:

$\Delta = 14^2 - 4 \times (-1) \times 1$
$\Delta = 196 - (-4)$
$\Delta = 200$

$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{200}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{200}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{100} \times \sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{100} \times \sqrt{2}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(7 + 5\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(7 - 5\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 7 + 5\,\sqrt{2} \qquad x_2 = 7 - 5\,\sqrt{2}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{7 + 5\,\sqrt{2}}$ et $\boxed{7 - 5\,\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 16\,x^2 - 49 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{49}^2 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{49}\right) \\ &= (4\,x + 7) \times (4\,x - 7) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\frac{-7}{4}}$ et $\boxed{\frac{7}{4}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 16\,x^2 + 64\,x + 64 \\ &= (4\,x)^2 + 2 \times 4\,x \times 8 + 8^2 \\ &= (4\,x + 8)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{-2}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 + 8\,x - 2$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = 8$ et $c = -2$:

$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-2)$
$\Delta = 64 - (-8)$
$\Delta = 72$

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{72}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{72}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{36} \times \sqrt{2}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-4 - 3\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-4 + 3\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -4 - 3\,\sqrt{2} \qquad x_2 = -4 + 3\,\sqrt{2}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-4 - 3\,\sqrt{2}}$ et $\boxed{-4 + 3\,\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 36\,x^2 - 16 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{16}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{16}\right) \\ &= (6\,x + 4) \times (6\,x - 4) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\frac{-2}{3}}$ et $\boxed{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 8\,x^2 - 7\,x \\ &= -x \times (-8\,x + 7) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\frac{7}{8}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -9\,x^2 - 7\,x$
$= -x \times (9\,x + 7)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-7}{9}}$

$Q(x) = 36\,x^2 - 81$
$= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{81}^2$
$= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{81}\right)$
$= (6\,x + 9) \times (6\,x - 9)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$R(x) = -x^2 + 18\,x - 9$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 18$ et $c = -9$:

$\Delta = 18^2 - 4 \times (-1) \times (-9)$
$\Delta = 324 - 36$
$\Delta = 288$

$x_1 = \dfrac{-18 - \sqrt{288}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-18 - \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(9 + 6\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 9 + 6\,\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-18 + \sqrt{288}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-18 + \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(9 - 6\,\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 9 - 6\,\sqrt{2}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{9 + 6\,\sqrt{2}}$ et $\boxed{9 - 6\,\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 16\,x^2 - 49$
$= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{49}^2$
$= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{49}\right)$
$= (4\,x + 7) \times (4\,x - 7)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-7}{4}}$ et $\boxed{\dfrac{7}{4}}$

$Q(x) = 4\,x^2 + 8\,x + 4$
$= (2\,x)^2 + 2 \times 2\,x \times 2 + 2^2$
$= (2\,x + 2)^2$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{-1}$

$R(x) = x^2 + 6\,x + 6$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 6$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 6$
$\Delta = 36 - 24$
$\Delta = 12$

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{12}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-3 - \sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -3 - \sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{12}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-3 + \sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = -3 + \sqrt{3}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-3 - \sqrt{3}}$ et $\boxed{-3 + \sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 3\,x^2 - 2$
$= \left(\sqrt{3}\,x\right)^2 - \sqrt{2}^2$
$= \left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\right) \times \left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\right)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

$Q(x) = 4\,x^2 - 25$
$= \left(\sqrt{4}\,x\right)^2 - \sqrt{25}^2$
$= \left(\sqrt{4}\,x + \sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{4}\,x - \sqrt{25}\right)$
$= (2\,x + 5) \times (2\,x - 5)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-5}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

$R(x) = x^2 - 6x + 8$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -6$ et $c = 8$:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8$
$\Delta = 36 - 32$
$\Delta = 4$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{4}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{6 - 2}{2}$
$x_1 = \dfrac{\cancel{2} \times 2}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = 2$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{4}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{6 + 2}{2}$
$x_2 = \dfrac{4 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = 4$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{2}$ et $\boxed{4}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -8x^2 - 3x$
$= -x \times (8x + 3)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-3}{8}}$

$R(x) = 8x^2 + 8$
$R(x) \geqslant 8$ car un carré est toujours positif.
$R(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = x^2 + 6x + 1$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 6$ et $c = 1$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 1$
$\Delta = 36 - 4$
$\Delta = 32$

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{32}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-3 - 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -3 - 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{32}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-3 + 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = -3 + 2\sqrt{2}$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-3 - 2\sqrt{2}}$ et $\boxed{-3 + 2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 81x^2 - 108x + 36$
$= (9x)^2 - 2 \times 9x \times 6 + 6^2$
$= (9x - 6)^2$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

$R(x) = 16x^2 - 25$
$= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{25}^2$
$= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{25}\right)$
$= (4x + 5) \times (4x - 5)$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-5}{4}}$ et $\boxed{\dfrac{5}{4}}$

$Q(x) = -x^2 + 8x - 8$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = -8$:

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-8)$
$\Delta = 64 - 32$
$\Delta = 32$

$x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{32}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-8 - \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(4 + 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{32}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-8 + \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{4 + 2\sqrt{2}}$ et $\boxed{4 - 2\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 36\,x^2 - 16 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x\right)^2 - \sqrt{16}^2 \\ &= \left(\sqrt{36}\,x + \sqrt{16}\right) \times \left(\sqrt{36}\,x - \sqrt{16}\right) \\ &= (6\,x + 4) \times (6\,x - 4) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -3\,x^2 + 6 \\ &= \sqrt{6}^2 - \left(\sqrt{3}\,x\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\,x\right) \times \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\,x\right) \\ &= \left(\sqrt{3}\,x + \sqrt{6}\right) \times \left(-\sqrt{3}\,x + \sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}}$

$Q(x) = -x^2 + 8\,x - 7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 8$ et $c = -7$:

$$\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-7)$$
$$\Delta = 64 - 28$$
$$\Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-8 - 6}{-2}$$
$$x_1 = \frac{7 \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{36}}{2 \times (-1)}$$
$$x_2 = \frac{-8 + 6}{-2}$$
$$x_2 = 1$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{7}$ et $\boxed{1}$