Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 16\,x^2 - 36 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x\right)^2 - \sqrt{36}^2 \\ &= \left(\sqrt{16}\,x + \sqrt{36}\right) \times \left(\sqrt{16}\,x - \sqrt{36}\right) \\ &= (4\,x+6) \times (4\,x-6) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$R(x) = -5\,x^2 - 8$

$R(x) \leqslant -8$ car un carré est toujours positif.

$R(x)$ n'a donc pas de racine.

$Q(x) = x^2 + 8\,x + 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = 1$, $b = 8$ et $c = 4$:

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 4$$
$$\Delta = 64 - 16$$
$$\Delta = 48$$

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{48}}{2\times 1} \qquad x_2 = \frac{-8+\sqrt{48}}{2\times 1}$$
$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{-8+\sqrt{16}\times\sqrt{3}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-4-2\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-4+2\sqrt{3}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$$
$$x_1 = -4-2\sqrt{3} \qquad x_2 = -4+2\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-4-2\sqrt{3}}$ et $\boxed{-4+2\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 14\,x + 1$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -14$ et $c = 1$:

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times (-1) \times 1$$
$$\Delta = 196 - (-4)$$
$$\Delta = 200$$

$$x_1 = \frac{14-\sqrt{200}}{2\times(-1)} \qquad x_2 = \frac{14+\sqrt{200}}{2\times(-1)}$$
$$x_1 = \frac{14-\sqrt{100}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{14+\sqrt{100}\times\sqrt{2}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-7+5\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(-7-5\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = -7+5\sqrt{2} \qquad x_2 = -7-5\sqrt{2}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-7+5\sqrt{2}}$ et $\boxed{-7-5\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4\,x^2 - 8\,x + 4 \\ &= (2\,x)^2 - 2 \times 2\,x \times 2 + 2^2 \\ &= (2\,x-2)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 81\,x^2 - 9 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x\right)^2 - \sqrt{9}^2 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x + \sqrt{9}\right) \times \left(\sqrt{81}\,x - \sqrt{9}\right) \\ &= (9\,x+3) \times (9\,x-3) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= -4\,x^2+2 \\ &= \sqrt{2}^2-\left(\sqrt{4}\,x\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2}+\sqrt{4}\,x\right)\times\left(\sqrt{2}-\sqrt{4}\,x\right) \\ &= \left(2\,x+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{2}-2\,x\right) \\ &= \left(2\,x+\sqrt{2}\right)\times\left(-2\,x+\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{2}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 49\,x^2+42\,x+9 \\ &= (7\,x)^2+2\times 7\,x\times 3+3^2 \\ &= (7\,x+3)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-3}{7}}$

$Q(x)=-x^2+6\,x-7$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a=-1$, $b=6$ et $c=-7$:

$\Delta=6^2-4\times(-1)\times(-7)$

$\Delta=36-28$

$\Delta=8$

$$x_1=\frac{-6-\sqrt{8}}{2\times(-1)} \qquad x_1=\frac{-6-\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_1=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_1=3+\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-6+\sqrt{8}}{2\times(-1)} \qquad x_2=\frac{-6+\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{-2} \qquad x_2=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}} \qquad x_2=3-\sqrt{2}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{3+\sqrt{2}}$ et $\boxed{3-\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x)=x^2+4\,x+3$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a=1$, $b=4$ et $c=3$:

$\Delta=4^2-4\times 1\times 3$

$\Delta=16-12$

$\Delta=4$

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times 1} \qquad x_1=\frac{-4-2}{2} \qquad x_1=\frac{-3\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_1=-3$$

$$x_2=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times 1} \qquad x_2=\frac{-4+2}{2} \qquad x_2=\frac{-1\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}} \qquad x_2=-1$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-3}$ et $\boxed{-1}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= -x^2+7 \\ &= \sqrt{7}^2-x^2 \\ &= \left(\sqrt{7}+x\right)\times\left(\sqrt{7}-x\right) \\ &= \left(x+\sqrt{7}\right)\times\left(\sqrt{7}-x\right) \\ &= \left(x+\sqrt{7}\right)\times\left(-x+\sqrt{7}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-\sqrt{7}}$ et $\boxed{\sqrt{7}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= 16\,x^2-72\,x+81 \\ &= (4\,x)^2-2\times 4\,x\times 9+9^2 \\ &= (4\,x-9)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{9}{4}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x)=-x^2+4\,x+8$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a=-1$, $b=4$ et $c=8$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 8$
$\Delta = 16 - (-32)$
$\Delta = 48$

$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{48}}{2 \times (-1)}$
$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{\left(2 + 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_1 = 2 + 2\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{48}}{2 \times (-1)}$
$x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-2}$
$x_2 = \dfrac{\left(2 - 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$
$x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{2 + 2\sqrt{3}}$ et $\boxed{2 - 2\sqrt{3}}$

$Q(x) = 81\,x^2 - 25$
$= \left(\sqrt{81}\,x\right)^2 - \sqrt{25}^2$
$= \left(\sqrt{81}\,x + \sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{81}\,x - \sqrt{25}\right)$
$= (9\,x + 5) \times (9\,x - 5)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-5}{9}}$ et $\boxed{\dfrac{5}{9}}$

$R(x) = 49\,x^2 - 70\,x + 25$
$= (7\,x)^2 - 2 \times 7\,x \times 5 + 5^2$
$= (7\,x - 5)^2$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{5}{7}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -9\,x^2 + 5$
$= \sqrt{5}^2 - \left(\sqrt{9}\,x\right)^2$
$= \left(\sqrt{5} + \sqrt{9}\,x\right) \times \left(\sqrt{5} - \sqrt{9}\,x\right)$
$= \left(3\,x + \sqrt{5}\right) \times \left(\sqrt{5} - 3\,x\right)$
$= \left(3\,x + \sqrt{5}\right) \times \left(-3\,x + \sqrt{5}\right)$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{5}}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

$Q(x) = 64\,x^2 - 32\,x + 4$
$= (8\,x)^2 - 2 \times 8\,x \times 2 + 2^2$
$= (8\,x - 2)^2$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

$R(x) = x^2 + 16\,x - 8$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 16$ et $c = -8$:

$\Delta = 16^2 - 4 \times 1 \times (-8)$
$\Delta = 256 - (-32)$
$\Delta = 288$

$x_1 = \dfrac{-16 - \sqrt{288}}{2 \times 1}$
$x_1 = \dfrac{-16 - \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{2}$
$x_1 = \dfrac{\left(-8 - 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_1 = -8 - 6\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-16 + \sqrt{288}}{2 \times 1}$
$x_2 = \dfrac{-16 + \sqrt{144} \times \sqrt{2}}{2}$
$x_2 = \dfrac{\left(-8 + 6\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$
$x_2 = -8 + 6\sqrt{2}$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-8 - 6\sqrt{2}}$ et $\boxed{-8 + 6\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = 64\,x^2 + 112\,x + 49$
$= (8\,x)^2 + 2 \times 8\,x \times 7 + 7^2$
$= (8\,x + 7)^2$

L'unique racine de $P(x)$ est $\boxed{\dfrac{-7}{8}}$

$Q(x) = 25\,x^2 - 4$
$= \left(\sqrt{25}\,x\right)^2 - \sqrt{4}^2$
$= \left(\sqrt{25}\,x + \sqrt{4}\right) \times \left(\sqrt{25}\,x - \sqrt{4}\right)$
$= (5\,x + 2) \times (5\,x - 2)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-2}{5}}$ et $\boxed{\dfrac{2}{5}}$

$R(x) = x^2 - 14\,x + 4$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -14$ et $c = 4$:

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 4$$
$$\Delta = 196 - 16$$
$$\Delta = 180$$

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{180}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{14 + \sqrt{180}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{36} \times \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{14 + \sqrt{36} \times \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(7 - 3\sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(7 + 3\sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 7 - 3\sqrt{5} \qquad x_2 = 7 + 3\sqrt{5}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{7 - 3\sqrt{5}}$ et $\boxed{7 + 3\sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 2\,x - 8$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = -8$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8)$$
$$\Delta = 4 - (-32)$$
$$\Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{2 - 6}{2} \qquad x_2 = \frac{2 + 6}{2}$$
$$x_1 = \frac{-2 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{4 \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-2}$ et $\boxed{4}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 2\,x + 1 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= (x - 1)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -5\,x^2 - 9\,x \\ &= -x \times (5\,x + 9) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{-9}{5}}$