Corrigé de l'exercice 1

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^2 - 25 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x\right)^2 - \sqrt{25}^2 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x + \sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{4}\,x - \sqrt{25}\right) \\ &= (2x+5) \times (2x-5) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-5}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9x^2 + 24x + 16 \\ &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= (3x+4)^2 \end{aligned}$$

L'unique racine de $Q(x)$ est $\boxed{\dfrac{-4}{3}}$

$R(x) = x^2 + 14x - 1$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 14$ et $c = -1$:

$$\Delta = 14^2 - 4 \times 1 \times (-1)$$
$$\Delta = 196 - (-4)$$
$$\Delta = 200$$

$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{200}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{200}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-14 - \sqrt{100} \times \sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-14 + \sqrt{100} \times \sqrt{2}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-7 - 5\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-7 + 5\sqrt{2}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -7 - 5\sqrt{2} \qquad x_2 = -7 + 5\sqrt{2}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-7 - 5\sqrt{2}}$ et $\boxed{-7 + 5\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 2

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 81x^2 - 49 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x\right)^2 - \sqrt{49}^2 \\ &= \left(\sqrt{81}\,x + \sqrt{49}\right) \times \left(\sqrt{81}\,x - \sqrt{49}\right) \\ &= (9x+7) \times (9x-7) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-7}{9}}$ et $\boxed{\dfrac{7}{9}}$

$$\begin{aligned} R(x) &= -5x^2 + 3x \\ &= x \times (-5x + 3) \end{aligned}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{3}{5}}$

$Q(x) = -x^2 - 2x + 4$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = -2$ et $c = 4$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 4$$
$$\Delta = 4 - (-16)$$
$$\Delta = 20$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{-2} \qquad x_2 = \frac{2 + \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-1 + \sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(-1 - \sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = -1 + \sqrt{5} \qquad x_2 = -1 - \sqrt{5}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-1 + \sqrt{5}}$ et $\boxed{-1 - \sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 3

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= -9x^2 + 9x \\ &= 9x \times (-x + 1) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 25x^2 - 25 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x\right)^2 - \sqrt{25}^2 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x + \sqrt{25}\right) \times \left(\sqrt{25}\,x - \sqrt{25}\right) \\ &= (5x+5) \times (5x-5) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-1}$ et $\boxed{1}$

$R(x) = x^2 - 8x - 4$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = -8$ et $c = -4$:

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$
$\Delta = 64 - (-16)$
$\Delta = 80$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{8 + \sqrt{80}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{16} \times \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{8 + \sqrt{16} \times \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(4 - 2\sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(4 + 2\sqrt{5}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = 4 - 2\sqrt{5} \qquad x_2 = 4 + 2\sqrt{5}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{4 - 2\sqrt{5}}$ et $\boxed{4 + 2\sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 4

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2 - x \\ &= -x \times (-3x + 1) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^2 - 9 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x\right)^2 - \sqrt{9}^2 \\ &= \left(\sqrt{4}\,x + \sqrt{9}\right) \times \left(\sqrt{4}\,x - \sqrt{9}\right) \\ &= (2x + 3) \times (2x - 3) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-3}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$R(x) = x^2 + 4x - 8$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = -8$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-8)$
$\Delta = 16 - (-32)$
$\Delta = 48$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{48}}{2 \times 1} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{48}}{2 \times 1}$$
$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{2}$$
$$x_1 = \frac{\left(-2 - 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}} \qquad x_2 = \frac{\left(-2 + 2\sqrt{3}\right) \times \cancel{2}}{1 \times \cancel{2}}$$
$$x_1 = -2 - 2\sqrt{3} \qquad x_2 = -2 + 2\sqrt{3}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{-2 - 2\sqrt{3}}$ et $\boxed{-2 + 2\sqrt{3}}$

Corrigé de l'exercice 5

Déterminer les racines des polynômes :

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^2 - 5 \\ &= \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 - \sqrt{5}^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{5}\right) \times \left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 25x^2 - 81 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x\right)^2 - \sqrt{81}^2 \\ &= \left(\sqrt{25}\,x + \sqrt{81}\right) \times \left(\sqrt{25}\,x - \sqrt{81}\right) \\ &= (5x + 9) \times (5x - 9) \end{aligned}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-9}{5}}$ et $\boxed{\dfrac{9}{5}}$

$R(x) = -x^2 + 18x - 1$ On calcule le discriminant de $R(x)$ avec $a = -1$, $b = 18$ et $c = -1$:

$\Delta = 18^2 - 4 \times (-1) \times (-1)$
$\Delta = 324 - 4$
$\Delta = 320$

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{320}}{2 \times (-1)} \qquad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{320}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{64} \times \sqrt{5}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-18 + \sqrt{64} \times \sqrt{5}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(9 + 4\sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}} \qquad x_2 = \frac{\left(9 - 4\sqrt{5}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 9 + 4\sqrt{5} \qquad x_2 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{9+4\sqrt{5}}$ et $\boxed{9-4\sqrt{5}}$

Corrigé de l'exercice 6

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 - 12x + 4$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = 1$, $b = -12$ et $c = 4$:

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$\Delta = 144 - 16$

$\Delta = 128$

$x_1 = \dfrac{12-\sqrt{128}}{2\times 1}$

$x_1 = \dfrac{12-\sqrt{64}\times\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \dfrac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$

$x_1 = 6-4\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{12+\sqrt{128}}{2\times 1}$

$x_2 = \dfrac{12+\sqrt{64}\times\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{\left(6+4\sqrt{2}\right)\times\cancel{2}}{1\times\cancel{2}}$

$x_2 = 6+4\sqrt{2}$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{6-4\sqrt{2}}$ et $\boxed{6+4\sqrt{2}}$

$Q(x) = x^2 - 36$

$= x^2 - \sqrt{36}^2$

$= \left(x+\sqrt{36}\right)\times\left(x-\sqrt{36}\right)$

$= (x+6)\times(x-6)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{-6}$ et $\boxed{6}$

$R(x) = 7x^2 - 2x$

$= -x \times (-7x+2)$

Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{\dfrac{2}{7}}$

Corrigé de l'exercice 7

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = -x^2 - 10x + 7$ On calcule le discriminant de $P(x)$ avec $a = -1$, $b = -10$ et $c = 7$:

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-1) \times 7$

$\Delta = 100 - (-28)$

$\Delta = 128$

$x_1 = \dfrac{10-\sqrt{128}}{2\times(-1)}$

$x_1 = \dfrac{10-\sqrt{64}\times\sqrt{2}}{-2}$

$x_1 = \dfrac{\left(-5+4\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$

$x_1 = -5+4\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{10+\sqrt{128}}{2\times(-1)}$

$x_2 = \dfrac{10+\sqrt{64}\times\sqrt{2}}{-2}$

$x_2 = \dfrac{\left(-5-4\sqrt{2}\right)\times\cancel{(-2)}}{1\times\cancel{(-2)}}$

$x_2 = -5-4\sqrt{2}$

Les racines de $P(x)$ sont $\boxed{-5+4\sqrt{2}}$ et $\boxed{-5-4\sqrt{2}}$

$Q(x) = 9x^2 - 1$

$= \left(\sqrt{9}\,x\right)^2 - \sqrt{1}^2$

$= \left(\sqrt{9}\,x+\sqrt{1}\right)\times\left(\sqrt{9}\,x-\sqrt{1}\right)$

$= (3x+1)\times(3x-1)$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$ et $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

$R(x) = 9x^2 + 6x + 1$

$= (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2$

$= (3x+1)^2$

L'unique racine de $R(x)$ est $\boxed{\dfrac{-1}{3}}$

Corrigé de l'exercice 8

Déterminer les racines des polynômes :

$P(x) = x^2 + 9$
$P(x) \geqslant 9$ car un carré est toujours positif.
$P(x)$ n'a donc pas de racine.

$R(x) = -6\,x^2 - 6\,x$
$\quad = -6\,x \times (x+1)$
Les racines de $R(x)$ sont $\boxed{0}$ et $\boxed{-1}$

$Q(x) = -x^2 + 12\,x - 9$ On calcule le discriminant de $Q(x)$ avec $a = -1$, $b = 12$ et $c = -9$:

$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-9)$
$\Delta = 144 - 36$
$\Delta = 108$

$$x_1 = \frac{-12 - \sqrt{108}}{2 \times (-1)}$$
$$x_1 = \frac{-12 - \sqrt{36} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_1 = \frac{\left(6 + 3\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_1 = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-12 + \sqrt{108}}{2 \times (-1)}$$
$$x_2 = \frac{-12 + \sqrt{36} \times \sqrt{3}}{-2}$$
$$x_2 = \frac{\left(6 - 3\sqrt{3}\right) \times \cancel{(-2)}}{1 \times \cancel{(-2)}}$$
$$x_2 = 6 - 3\sqrt{3}$$

Les racines de $Q(x)$ sont $\boxed{6 + 3\sqrt{3}}$ et $\boxed{6 - 3\sqrt{3}}$