Corrigé de l'exercice 1

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $h(t) = \dfrac{-2t-5}{-5t+6}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-5t+6=0$.

$$\begin{aligned} -5t+6 &= 0 \\ -5t &= -6 \\ t &= \frac{-6}{-5} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{6}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$h'(t) = \frac{(-2)\times(-5t+6)-(-2t-5)\times(-5)}{(-5t+6)^2} = \frac{-37}{(-5t+6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-5t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-37<0$ donc pour tout t de I, $h'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	-10		0
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{15}{56}$	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$

►2. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 162x + 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$f'(x) = 3x^2 + 9x - 162$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 9^2 - 4\times 3\times(-162) = 2\,025$ et $\sqrt{2\,025} = 45$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-9-\sqrt{2\,025}}{2\times 3} &= \frac{-9-\sqrt{2\,025}}{6} \\ &= \frac{-9-45}{6} \\ &= \frac{-54}{6} \\ &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-9+\sqrt{2\,025}}{2\times 3} &= \frac{-9+\sqrt{2\,025}}{6} \\ &= \frac{-9+45}{6} \\ &= \frac{36}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-9		6		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		-9		6		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1\,075$	$\nearrow$	$\dfrac{2\,197}{2}$	$\searrow$	-589	$\nearrow$	-165

Corrigé de l'exercice 2

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 2]$ par $f(t) = \dfrac{2t+3}{-2t+6}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-2t+6=0$.

$$\begin{aligned} -2t+6 &= 0 \\ -2t &= -6 \\ t &= \frac{-6}{-2} \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Or 3 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 2]$.

$$f'(t) = \frac{2 \times (-2t+6) - (2t+3) \times (-2)}{(-2t+6)^2} = \frac{18}{(-2t+6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(-2t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $18 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-10		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\dfrac{17}{26}$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{2}$

►**2.** Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 2$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$f'(x) = 3x^2 - 9x$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times 0 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)-\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{9-\sqrt{81}}{6} \\ &= \frac{9-9}{6} \\ &= \frac{0}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-9)+\sqrt{81}}{2\times 3} &= \frac{9+\sqrt{81}}{6} \\ &= \frac{9+9}{6} \\ &= \frac{18}{6} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		0		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	-10		0		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1\,452$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\dfrac{31}{2}$	$\nearrow$	548

Corrigé de l'exercice 3

▶1. On considère la fonction f définie sur $I = [0 \ ; \ 10]$ par $f(x) = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $x + 1 = 0$.

$x + 1 = 0$

$x = -1$

Or -1 n'est pas dans l'intervalle $[0 \ ; \ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [0 \ ; \ 10]$.

$$f'(x) = \frac{(-2) \times (x+1) - (-2x+2) \times 11}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(x+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-4 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	0		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\dfrac{18}{11}$

▶2. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 3x^3 - \dfrac{135}{2}x^2 + 504x + 9$ sur $[-10 \ ; \ 10]$.
$k'(x) = 9x^2 - 135x + 504$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-135)^2 - 4 \times 9 \times 504 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-135) - \sqrt{81}}{2 \times 9} &= \frac{135 - \sqrt{81}}{18} \\ &= \frac{135 - 9}{18} \\ &= \frac{126}{18} \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-135) + \sqrt{81}}{2 \times 9} &= \frac{135 + \sqrt{81}}{18} \\ &= \frac{135 + 9}{18} \\ &= \frac{144}{18} \\ &= 8\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 7$ et $x_2 = 8$.

x	-10 $\qquad$ 10
$k'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $k'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale k est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 4

►1. On considère la fonction h définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $h(x) = \dfrac{5x-8}{3x-3}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $3x - 3 = 0$.

$$\begin{aligned} 3x-3 &= 0 \\ 3x &= 3 \\ x &= \frac{3}{3} \end{aligned}$$

Or 1 n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 0]$.

$$h'(x) = \frac{5 \times (3x-3) - (5x-8) \times 3}{(3x-3)^2} = \frac{9}{(3x-3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(3x-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $9 > 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) > 0$.

x	-10 $\qquad$ 0
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$\frac{58}{33} \nearrow \frac{8}{3}$

►2. Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$q'(x) = 3x^2 - 18x + 15$
Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-18) - \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{18 - \sqrt{144}}{6} \\ &= \frac{18-12}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-18) + \sqrt{144}}{2 \times 3} &= \frac{18 + \sqrt{144}}{6} \\ &= \frac{18+12}{6} \\ &= \frac{30}{6} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Les racines de q' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 5$.

x	-10 $\qquad$ 10
$q'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $q'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale q est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $h(t) = \dfrac{-5t-2}{-4t-3}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-4t-3=0$.

$$\begin{aligned} -4t-3 &= 0 \\ -4t &= 3 \\ t &= \frac{3}{-4} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{3}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(t)$ pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$h'(t) = \frac{(-5)\times(-4t-3)-(-5t-2)\times(-4)}{(-4t-3)^2} = \frac{7}{(-4t-3)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(-4t-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $7>0$ donc pour tout t de I, $h'(t)>0$.

t	0	10
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$\frac{2}{3}$ ↗	$\frac{52}{43}$

►**2.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 - 24x^2 - 8$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 6x^2 - 48x$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-48)^2 - 4\times 6\times 0 = 2\,304$ et $\sqrt{2\,304} = 48$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-48)-\sqrt{2\,304}}{2\times 6} &= \frac{48-\sqrt{2\,304}}{12} \\ &= \frac{48-48}{12} \\ &= \frac{0}{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-48)+\sqrt{2\,304}}{2\times 6} &= \frac{48+\sqrt{2\,304}}{12} \\ &= \frac{48+48}{12} \\ &= \frac{96}{12} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 8$.

x	-10	10
$g'(x)$	$+$	

Comme $\Delta < 0$, $g'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale g est croissante sur $[-10\ ;\ 10]$.