Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud 13 novembre 2012

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Restitution organisée de connaissance**

   a. Somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$, φ est dérivable sur cet intervalle et $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - x > 0$ d'après le troisième résultat admis.
   φ est donc une fonction croissante sur $[0~;~+\infty[$ et comme $\varphi(0) = \mathrm{e}^0 - 0 = 1$ qui est donc le minimum de φ sur $[0~;~+\infty[$, on a donc $\varphi(x) \geqslant 1$ pour tout x de $[0~;~+\infty[$.

   b. Le résultat précédent s'écrit donc pour tout x de $[0~;~+\infty[$:
   $\varphi(x) \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{x^2}{2} = +\infty$, par comparaison (quatrième résultat admis), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2. **a.** *Méthode 1* : $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$.
   Posons $u(x) = \frac{1}{2}x$, alors $f(x) = \dfrac{u}{\mathrm{e}^u} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^u}{u}}$.
   Si x tend vers plus l'infini, u tend vers plus l'infini. On a démontré au 1. que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^u}{u}} = 0$, soit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   Méthode 2 : $f(x) = -\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
   Posons $u(x) = -\dfrac{1}{2}x$; on a donc $f(x) = -u\mathrm{e}^u$.
   Si x tend vers $+\infty$, u tend $-\infty$. On sait que $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} u\mathrm{e}^u$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   b. f produit de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $1 - \dfrac{1}{2}x$.
   $1 - \dfrac{1}{2}x > 0 \iff 1 > \dfrac{1}{2}x \iff 2 > x$.
   De même $1 - \dfrac{1}{2}x < 0 \iff 1 < \dfrac{1}{2}x \iff 2 < x$.
   Donc f est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2~;~+\infty[$.
   On a $f(0) = 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 2} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Partie B

1. **a.** u est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $u'(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{1}{2}at\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

Donc $u'(t) + \dfrac{1}{2}u(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{1}{2}at\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{2}at\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

u est solution de (E) si $a\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \iff a = \dfrac{1}{2}$.

La fonction $t \longmapsto u(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E).

b. On vient de voir que $u(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E) soit :

$\star \quad u'(t) + \dfrac{1}{2}u(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

v est solution de $(E) \iff v'(t) + \dfrac{1}{2}v(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \iff$ par différence avec l'égalité $\star$

$v'(t) + \dfrac{1}{2}v(t) - \left(u'(t) + \dfrac{1}{2}u(t)\right) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \iff$

$v'(t) - u'(t) + \dfrac{1}{2}v(t) - \dfrac{1}{2}u(t) = 0 \iff (v-u)'(t) + \dfrac{1}{2}(v-u)(t) = 0$

c'est-dire si et seulement si la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation $\left(E'\right)$.

c. Soit y une solution de l'équation, donc $y' + \dfrac{1}{2}y = 0 \quad \star\star$.

Posons $z(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}y$. z est dérivable et

$z'(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}y + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}y' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}y + y'\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} \times 0$(d'après $\star\star$) $= 0$.

La fonction z de dérivée nulle est donc une constante $K \in \mathbb{R}$.

$z(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}y = K \iff y = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}, K \in \mathbb{R}$.

d. On a vu au **b.** que les solutions v de l'équation (E) sont telles que $v - u = v - \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ sont solutions de $\left(E'\right)$. Donc d'après la question précédente :

$v - \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \iff v = \left(K' + \dfrac{1}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \longmapsto \left(K + \dfrac{1}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}, \quad K' \in \mathbb{R}$.

2. La solution $y(t) = \left(K + \dfrac{1}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ vérifie :

$y(0) = 0 \iff K\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 0} = 0 \iff K = 0$.

La solution est donc définie par $t \longmapsto \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = f(t)$.

3. **a.** On a vu que sur $[2 ; +\infty[$, f est décroissante. L'algorithme fait calculer successivement $f(3)$, $f(4), \ldots$: ces valeurs décroissent vers zéro, donc l'algorithme va s'arrêter dès qu'une image $f(n)$ sera inférieure à $0,1$. Cette valeur de n sera celle donnée à la sortie de le l'algorithme.

b. La calculatrice donne $f(7) \approx 0,107$, $\quad f(8) \approx 0,073$: $n_0 = 8$.

c. La réponse précédente peut se traduire par : à partir $8+8 = 16$ h il restera dans le corps moins de 0,1 g de principe actif soit moins de 10 %.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. M d'affixe z est invariant si et seulement si $M' = M \iff z' = z \iff \dfrac{2\mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}} = z \iff z(z-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}z \iff z(z - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}) = 0 \iff z(z - 3\mathrm{i}) = 0 \iff z = 0 \quad$ ou $z = 3\mathrm{i}$.

Les points invariants par f sont O et le point d'affixe 3i.

2. On a $z_{B'} = \dfrac{2\mathrm{i}z_B}{z_B - \mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i} \times 2\mathrm{i}}{2\mathrm{i} - \mathrm{i}} = \dfrac{-4}{\mathrm{i}} = 4\mathrm{i}$.

$z_{C'} = \dfrac{2\mathrm{i}z_C}{z_C - \mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i} \times 1}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -1+\mathrm{i}$.

3. a. Pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' est telle que :

$z' = \dfrac{2\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} \Rightarrow z' - 2\mathrm{i} = \dfrac{2\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} - 2\mathrm{i}$

$z' - 2\mathrm{i} = \dfrac{2\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}} - \dfrac{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}z - 2}{z-\mathrm{i}} = \dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}$.

b. On a $|z' - 2\mathrm{i}| = \mathrm{B}M'$ et

$\left|\dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|-2]}{|z-\mathrm{i}|} = \dfrac{2}{\mathrm{A}M}$.

L'égalité précédente : $z' - 2\mathrm{i} = \dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}$ se traduit en termes de modules par : $\mathrm{B}M' = \dfrac{2}{\mathrm{A}M}$.

Si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors $\mathrm{A}M = 1$, donc $\mathrm{B}M' = \dfrac{2}{1} = 2$.

Conclusion : si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors M' appartient au cercle Γ' de centre B et de rayon 2.

c. Pour les arguments : $z' - 2\mathrm{i} = \dfrac{-2}{z-\mathrm{i}} \to \arg(z' - 2\mathrm{i}) = \arg\left(\dfrac{-2}{z-\mathrm{i}}\right) \iff$

$\arg(z' - 2\mathrm{i}) = \arg(-2) - \arg(z - \mathrm{i}) \iff \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)$.

d. On calcule $\mathrm{AD}^2 = |z_D - z_A|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$.

$\mathrm{AD}^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{AD} = 1$, donc D appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1. D'après les résultats de la question précédente, D appartenant à Γ, son image D$'$ appartient à Γ' cercle de centre B et de rayon 2.

D'autre part le résultat de la question 3. c. montre qu'il suffit de construire sur le cercle de centre B et de rayon 1 un arc de même longueur que l' arc du cercle de centre A et de rayon 1 intercepté par l'angle égal à l'argument de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$. (voir figure à la fin)

4. a. Par définition $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff$

$3\overrightarrow{\mathrm{O}G} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{O}G} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

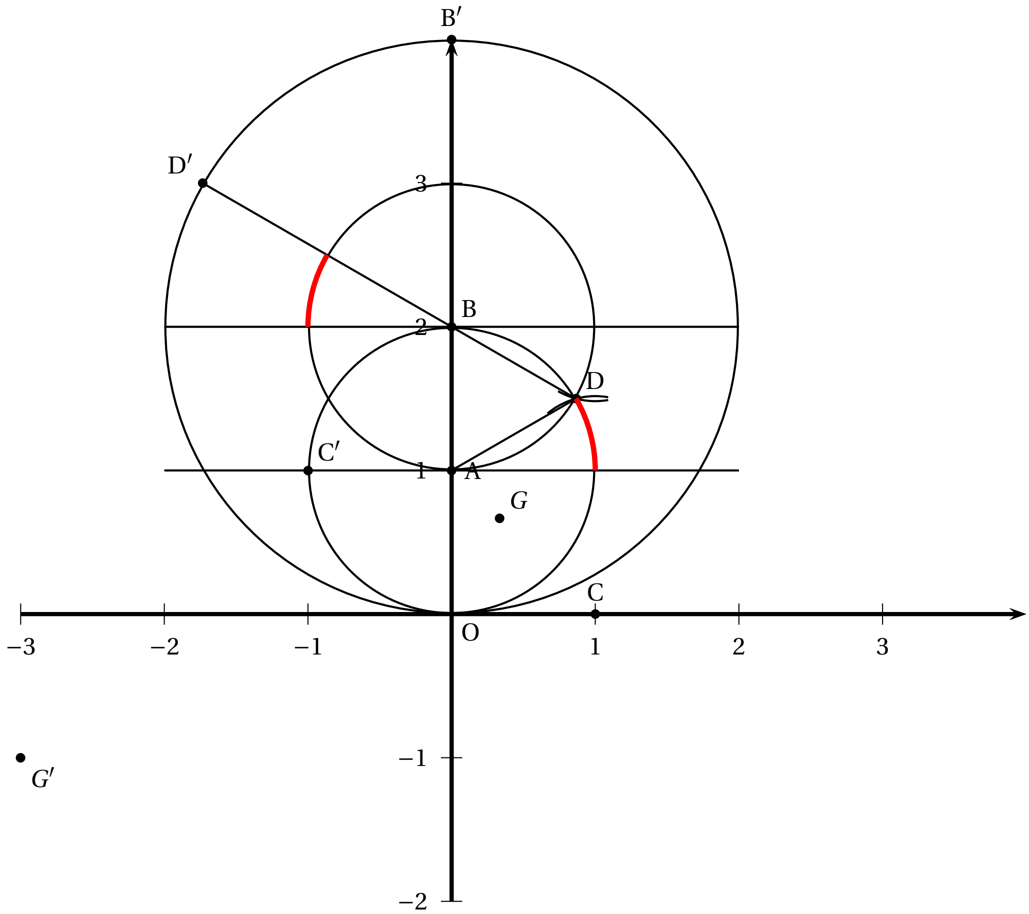
On a donc $z_G = \dfrac{1}{3}(z_B + z_C) = \dfrac{1}{3}(2\mathrm{i} + 1) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.

b. On calcule l'affixe de $\overrightarrow{G'\mathrm{O}} + \overrightarrow{G'\mathrm{B}'} + \overrightarrow{G'\mathrm{C}'}$ c'est-dire $z_{\overrightarrow{G'\mathrm{O}}} + z_{\overrightarrow{G'\mathrm{B}'}} + z_{\overrightarrow{G'\mathrm{C}'}} =$

$3 + \mathrm{i} + 3 + 5\mathrm{i} + 0 + 2\mathrm{i} = 6 + 8\mathrm{i} \neq 0$.

Conclusion : G' n'est pas l'isobarycentre de O, B$'$ et C$'$. Ce qui est évident sur la figure.

On peut également dire que O, B$'$ et C$'$ appartiennent au disque de centre B et de rayon 2 : leur isobarycentre (centre de gravité) appartient lui aussi à ce disque ce qui n'est pas le cas de G'.



Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On a par définition de la similitude de rapport k :
   BC $= k$AB soit $1 = kL$;
   CE $= k$ BC soit $L - 1 = k \times 1$ soit en reportant dans l'équation précédente :
   $1 = L(L-1) \iff L^2 - L - 1 = 0 \iff \left(L - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \iff \left(L - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff \left(L - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(L - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \iff L - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $L - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \iff L = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.
   Seule la solution positive est valable : $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).
2. **a.** La droite (AB) a pour image la droite (BC). L'angle de la similitude est donc égale à $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{BC}}\right) = +\frac{\pi}{2}$.
   On a vu que $1 = kL$, donc $k = \frac{1}{L} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

   b. Ω est par définition invariant par f, donc aussi par $f \circ f$.

$f \circ f(\Omega) = \Omega$;
Par f, A a pour image B et B a pour image C, donc
$f \circ f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$;
Par f, B a pour image C et C a pour image E, donc
$f \circ f(\mathrm{B}) = \mathrm{E}$;

c. La composée des deux similitudes de centre Ω est une similitude de centre Ω, dont le rapport est le produit des rapports soit k^2 et l'angle la somme des angles soit π.

d. A et C sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (AC) ;
B et E sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (BE), donc Ω est le point commun aux droites (AC) et (BE).

3. a. L'image par f de la droite (AB) est la droite (BC) et l'image du point C est le point E.
Comme (CD) est parallèle à (AB) son image par f est la parallèle à (BC) contenant E, donc la droite (EF).

b. On sait que $\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{E}}\,,\,\overrightarrow{\Omega\,\mathrm{E}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Or on a vu que la droite (BE) est l'image de la droite (AC) par f, donc (AC) $\perp$ (BE).
D'après la question précédente le point E$'$ appartient à la droite (EF) et aussi à (AC).
Conclusion : le point E$'$ est le point commun aux droites (EF) et (AC).

Partie B

1. Dans le repère choisi on a A$(0\,;\,0)$, B$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ 0\right)$ et C$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ 1\right)$
L'écriture complexe de la similitude directe est $z' = az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. En utilisant les images de A et de B par f : on a

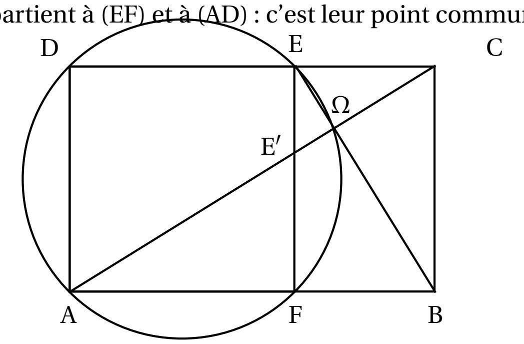
$$\left\{\begin{array}{lcl} z_{\mathrm{B}} &=& az_{\mathrm{A}} + b\\ z_{\mathrm{C}} &=& az_{\mathrm{B}} + b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& a \times 0 + b\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& b\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mathrm{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{1+\sqrt{5}}{2} &=& b\\ \mathrm{i} &=& a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) +\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b &=& \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ a &=& \frac{2}{1+\sqrt{5}}\mathrm{i}\end{array}\right. .$$

$a = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}\mathrm{i} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}$.
L'écriture complexe de f est donc :

$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

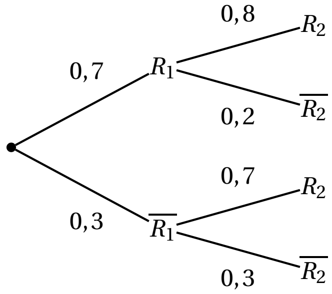
2. On a $z_{\mathrm{D}} = \mathrm{i}$. En utilisant le résultat précédent et si D$'$ est l'image de D par f :
$z_{\mathrm{D}'} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}z_{\mathrm{D}} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i} \times \mathrm{i} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 = z_{\mathrm{F}}$.
On peut également dire que D appartient à (CD), donc son image appartient à l'image de (CD) qui est la droite (EF)
D appartient à (AD), donc son image appartient à l'image par f de (AD) ; or A est invariant, donc l'image de (AD) est la perpendiculaire à (AD) contenant A, soit (AB).
Conclusion : D$''$ appartient à (EF) et à (AD) : c'est leur point commun F.



Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** On a l'arbre de probabilités suivant :

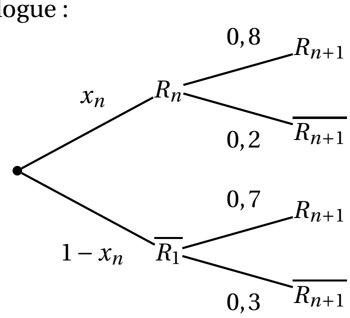


On a $p(X = 2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$;
$p(X = 1) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,14 + 0,21 = 0,35$;
$p(X = 0) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

b. $\mathrm{E}(X) = 2 \times 0,56 + 1 \times 0,35 + 0 \times 0,09 = 1,12 + 0,35 = 1,47 \approx 1,5$.

2. **a.** D'après l'énoncé $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,7$.

b. On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1} = x_n \times 0,8 + (1 - x_n) \times 0,7 = 0,8x_n - 0,7x_n + 0,7 = 0,7 + 0,1x_n$.

3. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7 = 9(0,7 + 0,1x_n) - 7 = 6,3 + 0,9x_n - 7 = 0,9x_n - 0,7 = 0,1(9x_n - 7) = 0,1u_n$.

$u_{n+1} = 0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,1$, de premier terme $u_1 = 9x_1 - 7 = 9 \times 0,7 - 7 = -0,7$.

b. On sait que pour tout naturel n, $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,7 \times 0,1^{n-1}$.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Par suite, comme $x_n = \dfrac{u_n + 7}{9}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{7}{9} \approx 0,777\,778$.

Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Intersection avec $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath}\right)$: avec $y = z = 0$, on obtient $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

Intersection avec $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\right)$: avec $x = z = 0$, on obtient $\mathrm{B}(0\,;\,-1\,;\,0)$.

Intersection avec $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$: avec $x = y = 0$, on obtient $\mathrm{A}\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

On a $\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$;
$\mathrm{AC}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$;
$\mathrm{BC}^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$;
Donc tous les côtés ont des longueurs différentes : affirmation fausse.

2. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \delta_1 \cap \mathscr{P} \iff 2(1+t)-(5-4t)+3(2-2t)-1=0 \iff 2+2t-5+4t+6-6t-1=0 \iff 2=0$ égalité fausse : affirmation fausse

3. δ_1 a un vecteur directeur $\overrightarrow{\delta_1}\,(1\,;\,-4\,;\,-2)$;

δ_2 a un vecteur directeur $\overrightarrow{\delta_2}\,(-1\,;\,+4\,;\,2)$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{\delta_2} = -\overrightarrow{\delta_1}$), donc les droites sont parallèles : affirmation vraie.

4. $\mathscr{P}$ a un vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant S a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.

Une équation paramétrique de cette perpendiculaire est donc :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t\\ y & = & 3-t\\ z & = & 5+3t \end{array}\right.$$

Cette perpendiculaire coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point éventuel dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ c'est-à-dire si :

$2(1+2t)-(3-t)+3(5+3t)-1=0 \iff 2+4t-3+t+15+9t-1=0 \iff 14t+13=0 \iff t=-\dfrac{13}{14}$.

En reportant cette valeur dans l'équation paramétrique, on obtient les coordonnées du projeté orthogonal de S sur $\mathscr{P}$:

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2\times\left(-\frac{13}{14}\right)\\ y & = & 3-\left(-\frac{13}{14}\right)\\ z & = & 5+3\left(-\frac{13}{14}\right) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -\frac{12}{14}\\ y & = & \frac{55}{14}\\ z & = & \frac{31}{14} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -\frac{6}{7}\\ y & = & \frac{55}{14}\\ z & = & \frac{31}{14} \end{array}\right.$$

Affirmation vraie.

5. On calcule la distance du point S au plan $\mathscr{P}$:

$$d(\mathrm{S}\,;\,\mathscr{P}) = \frac{\left|2x_{\mathrm{S}}-y_{\mathrm{S}}+3z_{\mathrm{S}}-1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{|2-3+15-1|}{\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{14}} \approx 3,4 > 3.$$

La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est supérieure au rayon de la sphère : cela signifie que la sphère et le plan n'ont pas de point commun : affirmation fausse.