Corrigé du baccalauréat S Métropole 13 septembre 2012

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

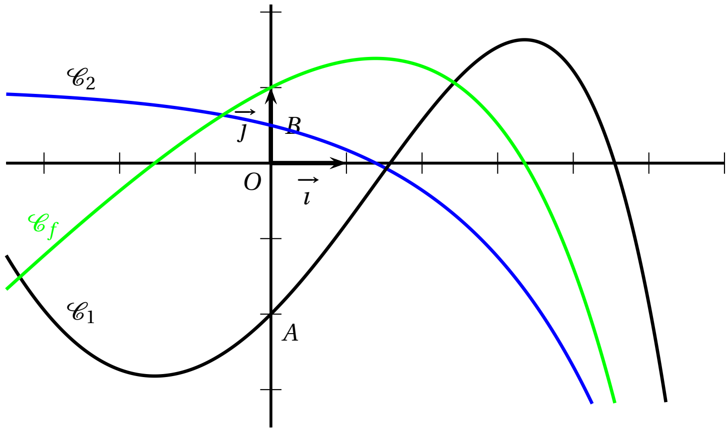
1. D'après le tableau de variations f est croissante puis décroissante, donc :
   - $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,a[$;
   - $f'(x) < 0$ sur $]a\,;\,+\infty[$;
   - $f'(a) = 0$.
2. **a.** Seuls les points de $\mathscr{C}_2$ ont des ordonnées positives puis négatives, donc seule $\mathscr{C}_2$ peut être la courbe représentative de f'.
   Donc $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une primitive F de f.

   b. $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse a ; d'après la figure $1 < a < 2$.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de F au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $F'(a) = f(a) = b$; d'après la figure ce coefficient directeur est supérieur à zéro. Conclusion $f(a) = b > 0$.
3. **a.** Si $g(x) = \alpha x + \beta$, alors $g'(x) = \alpha$.
   On a donc :
   $g(x) - 2g'(x) = x \iff \alpha x + \beta - 2\alpha = x$.
   Cette égalité est vraie quel que soit le réel x.
   En particulier pour $x = 0$, on a $\beta - 2\alpha = 0 \iff \beta = 2\alpha$.
   Pour $x = 1$, on a $\alpha + \beta - 2\alpha = 1 \iff \alpha = 1$.
   Finalement $\alpha = 1$ et $\beta = 2\alpha = 2$.
   La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2$ vérifie l'équation différentielle.

   b. La dérivée de la fonction $f - g$ est la fonction $f' - g'$ et
   $f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{2}\big(f(x) - x\big) - 1 = \dfrac{1}{2}(f(x) - x - 2) = \dfrac{1}{2}[f(x) - (x+2)] = \dfrac{1}{2}[f(x) - g(x)]$.
   La fonction $f - g$ est donc une solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$.

   c. On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par $x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, avec $k \in \mathbb{R}$ quelconque.
   On a donc $f(x) - g(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \iff f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + g(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

   d. On a $f'(x) = k \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 1$.
   On sait que $f'(0) = \dfrac{1}{2} \iff k \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0} + 1 = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{k}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{k}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff k = -1$.
   On a donc pour tout réel x, $f(x) = x + 2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   Une primitive de la fonction $x \longmapsto x$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$;
   Une primitive de la fonction $x \longmapsto 2$ est la fonction $x \longmapsto 2x$;
   Une primitive de la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ est la fonction $x \longmapsto -2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$;
   On a donc $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$ sur $\mathbb{R}$.
   Comme $F(0) = -2 \iff -2 + C = -2 \iff C = 0$, on a finalement
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ sur $\mathbb{R}$.
   Maximum de f : $f'(x) = 0 \iff 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = 2 \iff \frac{1}{2}x = \ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff x = 2\ln 2$. Donc $a = 2\ln 2$.
   Le maximum est donc égal à $f(2\ln 2) = 2\ln 2 + 2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 2\ln 2} = 2\ln 2 + 2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln 2}$. Donc $b = 2\ln 2$.

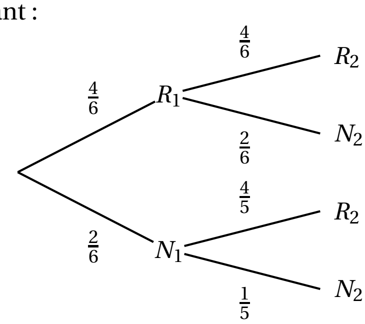


Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. **a.** On peut dresser l'arbre suivant :



On a $p\left(R_1 \cap R_2\right) = p\left(R_1\right) \times p_{R_1}\left(R_2\right) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{9}$.

b. $p_{N_2} = p_{R_1}\left(N_2\right) + p_{N_1}\left(N_2\right) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{10+3}{45} = \dfrac{13}{45}$.

On a $p_{N_2}\left(R_1\right) = \dfrac{p\left(N_2 \cap R_1\right)}{p\left(N_2\right)} = \dfrac{p\left(R_1 \cap N_2\right)}{p\left(N_2\right)} = \dfrac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}}{\frac{13}{45}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{13}{45}} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{45}{13} = \dfrac{10}{13}$.

2. **a.** La probabilité de tirer une boule rouge, sachant qu'il y a 4 rouges et n noires pour un total de $n+4$ boules est égale à :
$p = \dfrac{4}{n+4}$.

b. La probabilité de tirer quatre boules rouges est égale à $\left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$, donc l'évènement contraire, soit l'une au moins des boules est noire, a une probabilité de $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

c. On a $q_n \geqslant 0{,}9999 \iff 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4 \geqslant 0{,}9999 \iff 0{,}0001 \geqslant \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4 \iff 0{,}1 \geqslant \dfrac{4}{n+4} \iff$ $0{,}1(n+4) \geqslant 4 \iff 0{,}1n + 0{,}4 \geqslant 4 \iff 0{,}1n \geqslant 3{,}6 \iff n \geqslant 36$.
On a donc $q_{36} = 0{,}9999$.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{7}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2x^2}\left(x^2 - 7\right)$ qui est du signe de $x^2 - 7$.

Donc $f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0 \iff x = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{7}$.

Il y a donc une solution dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$: $\sqrt{7}$.

Le trinôme $x^2 - 7$ est positif sauf entre ses racines donc ici sur $\left]0~;~\sqrt{7}\right[$.

Conclusion : f est décroissante sur $\left]0~;~\sqrt{7}\right[$ puis croissante sur $\left]\sqrt{7}~;~+\infty\right[$; donc $f\left(\sqrt{7}\right)$ est le minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.

$f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \dfrac{7}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$. Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$ y compris $u_0 = 3$, car $3^2 > 7$.

2. a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{u_n} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7 - u_n^2}{u_n}\right)$.

Comme $\dfrac{1}{2} > 0$, $u_n > 0$ et que $u_n \geqslant \sqrt{7} \Rightarrow u_n^2 \geqslant 7 \Rightarrow u_n^2 - 7 \geqslant 0 \Rightarrow 7 - u_n^2 \leqslant 0$, on en conclut que

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

b. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\sqrt{7}$ est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à $\sqrt{7}$.

c. $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{7}{\ell} \iff \ell = \dfrac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7}$ (puisque la limite est positive).

3. $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n} - 2\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. (identité remarquable)

4. a. *Initialisation* : $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,35$ et $d_0 = 1$.

On a bien $u_0 - \sqrt{7} \leqslant d_0$.

Hérédité :

Remarque préliminaire : on a démontré que $u_n \geqslant \sqrt{7}$, donc $u_n > 1$ ou encore $\dfrac{1}{u_n} < 1 \quad (2)$.

Supposons qu'il existe un naturel n tel que $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$.

On a démontré à la question 3 que :

$u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. Donc comme $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n \Rightarrow \left(u_n - \sqrt{7}\right)^2 \leqslant d_n^2$, l'égalité du 3 donne :

$u_{n+1} - \sqrt{7} < \dfrac{1}{2}d_n^2 \times \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{2}d_n^2$ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.

Finalement $u_{n+1} - \sqrt{7} < \dfrac{1}{2}d_n^2 \iff u_{n+1} - \sqrt{7} < d_{n+1}$.

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b. L'algorithme indique que pour que $d_n \leqslant 10^{-9}$ il faut que $n \geqslant 5$.

On a donc $d_5 \leqslant 10^{-9}$.

Comme $u_5 - \sqrt{7} < u_5$ c'est-à-dire $u_5 - \sqrt{7} < 10^{-9}$, on en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit A le point d'affixe $1-2\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $-3+4\mathrm{i}$.
   On a $|z-1+2\mathrm{i}| = |z+3-4\mathrm{i}| \iff |z-z_{\mathrm{A}}| = |z-z_{\mathrm{B}}| \iff \mathrm{A}M = \mathrm{B}M$.
   Les points M équidistants de A et de B appartiennent à la médiatrice de [AB].
   On vérifie que $|5+5\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}|^2 = |4+7\mathrm{i}|^2 = 16+49 = 65$ et que $|5+5\mathrm{i}+3-4\mathrm{i}|^2 = |8+\mathrm{i}|^2 = 64+1 = 65$.
   Le point H est bien un point de la médiatrice. VRAIE
2. Il faut vérifier si effectivement $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire si $z_{\overrightarrow{AC}} = -2z_{\overrightarrow{AB}}$.
   $z_{\overrightarrow{AC}} = 3-2\mathrm{i}-(2-\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$;
   $-2\overrightarrow{AB} = -2(1+\mathrm{i}-(2-\mathrm{i})) = -2(-1+2\mathrm{i}) = 2-4\mathrm{i}$. Affirmation FAUSSE.
3. On a $z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})z = z\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = z\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = z\times \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}$.
   f est donc la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Comme $\frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$ l'affirmation est FAUSSE.
4. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de $\mathcal{D}$.
   Comme $3(2-t)+1+3t-7 = 6-3t+1+3t-7 = 0$ tout point de $\mathcal{D}$ est un point de $\mathcal{P}$. La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, donc lui est parallèle.
   Autre méthode : le plan a un vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ a un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$.
   Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = -3+3+0 = 0$.
   Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à un vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc la droite $\mathcal{D}$ est bien parallèle au plan $\mathcal{P}$. Affirmation VRAIE.
5. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à :
   $d(A,\mathcal{P}) = \dfrac{|1+12+4+1|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{26}}$.
   $d^2(A,\mathcal{P}) = \dfrac{18^2}{26} = \dfrac{324}{26} \approx 12,46 < 16$ carré du rayon de la sphère, donc la sphère et le plan sont sécants. Affirmation VRAIE.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Une solution « évidente » de cette équation est le couple $(-3\ ;\ 3)$ car :
   $5\times(-3)+6\times 3 = 3$. Or $18k+3 = -3 \iff 18k = -6 \iff 3k = -1$ et cette équation n'a pas de solution entière. Ces couples sont bien solutions mais ils ne représentent pas tous les couples solutions.
   L'affirmation est FAUSSE.
2. On a successivement :
   $3^0 \equiv 1 \quad [7]$;
   $3^1 \equiv 3 \quad [7]$;
   $3^2 \equiv 2 \quad [7]$;
   $3^3 \equiv 6 \quad [7]$;
   $3^4 \equiv 4 \quad [7]$;
   $3^5 \equiv 5 \quad [7]$;
   $3^6 \equiv 1 \quad [7]$.
   On a $2012 = 6\times 335+2$, donc $3^{2012} = 3^{6\times 335+2} = 3^{6\times 335}\times 3^2 = \left(3^6\right)^{335}\times 3^2$.
   On a vu 'résultats ci-dessus que $3^6 \equiv 1 \quad [7] \Rightarrow \left(3^6\right)^{335} \equiv 1^{335} \quad [7]$ et $3^2 \equiv 2 \quad [7]$, d'où par produit :
   $\left(3^6\right)^{335}\times 3^2 \equiv 1\times 2 \quad [7]$ et finalement
   $3^{2012} \equiv 2 \quad [7]$
   Affirmation FAUSSE : le reste est égal à 2.

3. On a $z_{\text{A}} = 2 - \text{i}$, $z_{\text{B}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} z_{\text{A}} = \text{i}z_{\text{A}} = \text{i}(2-\text{i}) = 1 + 2\text{i}$.
Enfin $z_{\text{C}} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$.
Soit C$'$ l'image de O dans similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On a par définition :
$z_{\text{O}'} - z_{\text{A}} = \sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{2}}((z_{\text{O}} - z_{\text{A}}) = -\text{i}\sqrt{2}((z_{\text{O}} - z_{\text{A}})$.
D'où : $z_{\text{O}'} = z_{\text{A}} - \text{i}\sqrt{2}((z_{\text{O}} - z_{\text{A}}) = 2 - \text{i} - \text{i}\sqrt{2}(-2+\text{i}) = 2 - \text{i} + 2\sqrt{2}\text{i} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} + \text{i}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
Cette affixe n'est pas celle de C. Affirmation FAUSSE.

4. On a $(f \circ f)(z = (-1+\text{i})(-1+\text{i})z = (1 - 1 - 2\text{i})z = -2\text{i}z = 2\text{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.
On reconnait la similitude de centre >O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
La droite (AB) est donc bien transformée en une droite perpendiculaire. Affirmation VRAIE.

5. Dans la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ un point M d'affixe z a pour image le point M' d'affixe z' telle que :
$z' - z_{\text{A}} = \sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}}(z - z_{\text{A}})$ ou encore $z' - (2-\text{i}) = \sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}}(z - (2-\text{i}))$.
Donc $z' = 2 - \text{i} + \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right)(z - 2 + \text{i})$.
$z' = 2 - \text{i} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 2 + \text{i})$.
$z' = 2 - \text{i} + (1-\text{i})(z - 2 + \text{i})$.
$z' = 2 - \text{i} + (1-\text{i})z + (1-\text{i})(-2+\text{i})$, soit enfin
$z' = 2 - \text{i} + (1-\text{i})z - 2 + \text{i} - 2\text{i} + 1$
$z' = (1-\text{i})z + 1 - 2\text{i}$. Ce n'est pas l'écriture proposée. Affirmation FAUSSE.
Rem. on pouvait aussi dire que la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ transforme le point O en le point B d'affixe $1 + 2\text{i}$.
Or l'écriture proposée donne comme affixe de l'image de O : $(1-\text{i}) \times 0 + 3 - \text{i} = 3 - \text{i}$ qui n'est pas l'affixe de B.