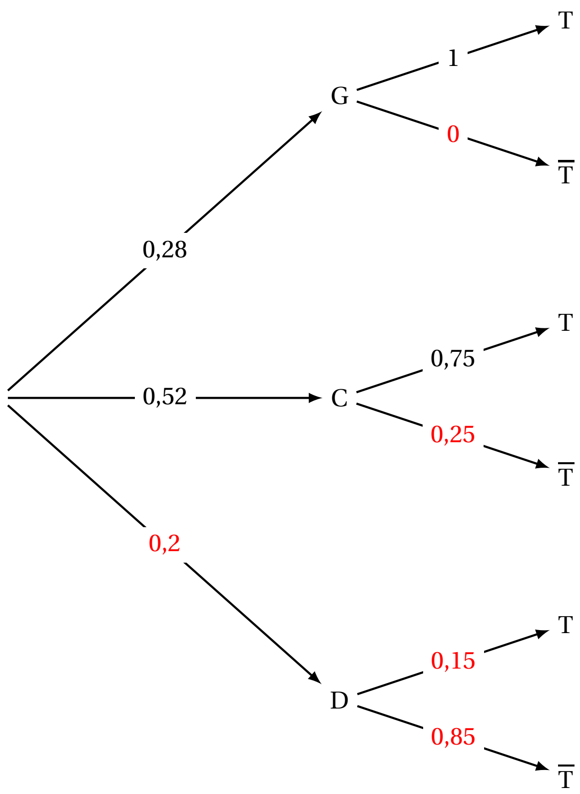
Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Nord
1$^{\text{er}}$ juin 2016

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Voici un arbre qui convient (les données du texte sont en noir) :



2. $p(\text{C} \cap \text{T}) = p(\text{C}) \times p_{\text{C}}(\text{T})$
$p(\text{C} \cap \text{T}) = 0,52 \times 0,75$
$p(\text{C} \cap \text{T}) = 0,39$.

3. **a.** G, C et D forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales, on obtient donc :
$p(\text{T}) = p(\text{G} \cap \text{T}) + p(\text{C} \cap \text{T}) + p(\text{D} \cap \text{T})$
puis, successivement :
$p(\text{D} \cap \text{T}) = p(\text{T}) - p(\text{G} \cap \text{T}) - p(\text{C} \cap \text{T})$
$p(\text{D} \cap \text{T}) = p(\text{T}) - p(\text{G}) \times p_{\text{G}}(\text{T}) - p(\text{C} \cap \text{T})$
$p(\text{D} \cap \text{T}) = 0,7 - 0,28 \times 1 - 0,39$
$p(\text{D} \cap \text{T}) = 0,03$.

   b. On cherche $p_{\text{D}}(\text{T})$.
Or, $p_{\text{D}}(\text{T}) = \dfrac{p(\text{D} \cap \text{T})}{p(\text{D})}$

$p_{\text{D}}(\text{T}) = \dfrac{0,03}{0,2}$

$p_{\text{D}}(\text{T}) = \dfrac{3}{20} = 0,15$

La probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes est de 0,15.

Partie B

1. La calculatrice donne $p(120 < \text{V} < 130) \approx 0,409$.
2. On cherche $p(\text{V} \geqslant 138)$.
   ⋆ 1re méthode
   On sait que $p(\text{V} > 120) = 0,5$.
   Comme $p(\text{V} \geqslant 138) = p(\text{V} > 120) - p(120 < \text{V} < 138)$, on obtient :
   $p(\text{V} \geqslant 138) \approx 0,5 - 0,492$
   $p(\text{V} \geqslant 138) \approx 0,008$.
   ⋆ 2e méthode
   En remplaçant $p(\text{V} \geqslant 138)$ par $p(138 \leq \text{V} \leq 10^{99})$, la calculatrice, donne :
   $p(\text{V} \geqslant 138) \approx 0,008$.
   ⋆ **Conclusion**
   La probabilité qu'un automobiliste soit sanctionné est environ de 0,008.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. Diminuer de 8% revient à multiplier par 0,92.
   On obtient donc le nombre d'abonnés au 1er février 2016 en effectuant le calcul suivant :
   $4\,000 \times 0,92 + 8\,000 = 11\,680$.
   Le nombre d'abonnés au 1er février 2016 est de 11 680.
2. **a.** On obtient le tableau suivant

Valeur de U	4	11,7	18,7	25,2	31,2	36,7	41,8
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition U < 40	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

   b. La valeur affichée en sortie sera 6.
   Il s'agit du premier mois à partir duquel le nombre d'abonnés est supérieur ou égal à 40 000.
   Le nombre d'abonnés devient donc supérieur ou égal à 40 000 au 1er juillet 2016.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 100$

$$\begin{aligned} &= 0,92u_n + 8 - 100 \\ &= 0,92u_n - 92 \\ &= 0,92(u_n - 100) \\ &= 0,92v_n \end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,92$.
   $v_0 = u_0 - 100 = 4 - 100 = -96$
   Son premier terme est $v_0 = -96$.

   b. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$, soit
   $v_n = (-96) \times 0,92^n$.

   c. Comme, pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - 100$, alors $u_n = v_n + 100$.
   En utilisant la question précédente, on obtient donc, pour tout entier naturel n :
   $u_n = 100 - 96 \times 0,92^n$.

4. On cherche le premier entier naturel n vérifiant $u_n > 70$.

Or, pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} u_n > 70 &\Leftrightarrow 100 - 96 \times 0,92^n > 70 \\ &\Leftrightarrow -96 \times 0,92^n > -30 \\ &\Leftrightarrow 0,92^n < 0,3125 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,92^n\right) < \ln(0,3125) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,92) < \ln(0,3125) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,3125)}{\ln(0,92)} \approx 13,95$.

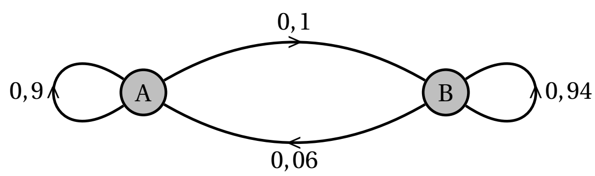
Le premier entier qui convient est donc 14.

C'est donc au 1er mars 2017 que la nombre d'abonnés deviendra supérieur à 70 000.

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** La situation peut être représentée par l'arbre probabiliste ci-dessous :



b. La matrice de transition correspondante est : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$.

c. $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_0 \times \mathrm{M}$

$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,06 & 0,94 \end{pmatrix}$

$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \times 0,9 + 0 \times 0,06 & 1 \times 0,1 + 0 \times 0,94 \end{pmatrix}$

$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

2. L'algorithme qui convient est l'agorithme 2.

En effet, dans l'algorithme 1, le relation de récurrence utilisée pour passer de b_n à b_{n+1} est $b_{n+1} = 0,1 \times a_{n+1} + 0,94 \times b_n$,

car la valeur de la variable a a été modifiée à la ligne « a prendre la valeur $0,9 \times a + 0,06 \times b$ » avant le calcul de b.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.

Or, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$, donc $b_n = 1 - a_n$.

On obtient donc, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n)$,

soit $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.

b. Pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,84a_n + 0,06 - 0,375 \\ &= 0,84a_n - 0,315 \\ &= 0,84\left(a_n - \frac{0,315}{0,84}\right) \\ &= 0,84(a_n - 0,375) \\ &= 0,84u_n \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,84$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 0,375 = 1 - 0,375 = 0,625$.

c. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$,
soit $u_n = 0,625 \times 0,84^n$.
Comme, pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 0,375$, alors $a_n = u_n + 0,375$.
En utilisant ce qui précède, on obtient donc $a_n = 0,375 + 0,625 \times 0,84^n$.

4. On cherche le permier entier naturel n tel que $a_n < 0,5$.

Or, pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} a_n < 0,5 &\Leftrightarrow 0,375 + 0,625 \times 0,84^n < 0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,625 \times 0,84^n < 0,125 \\ &\Leftrightarrow 0,84^n < \frac{0,125}{0,625} \\ &\Leftrightarrow 0,84^n < 0,2 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,84^n\right) < \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,84) < \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,84)} \approx 9,23$.
Le premier entier qui convient est donc 10.
C'est donc à partir de 2020 que la proportion d'abonnés à la version papier du magazine devient inférieure à 50%.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle $[10; 50]$.
X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10; 50]$.
La probabilité cherchée est donc $p(15 \leqslant X \leqslant 20)$. Or,
$p(15 \leqslant X \leqslant 20) = \displaystyle\int_{15}^{20} \frac{1}{40}\,\mathrm{d}x$
$p(15 \leqslant X \leqslant 20) = \dfrac{20-15}{40}$
$p(15 \leqslant X \leqslant 20) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$.
La bonne réponse est la **réponse b.**.

2. On cherche le réel t compris entre 0 et 100 tel que $200 \times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)^2 = 100$.

Pour tout réel $t \in [0; 100]$,
$$\begin{aligned} 200 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 100 &\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2 = 0,5 \\ &\Longleftrightarrow 1 - \frac{t}{100} = \sqrt{0,5}, \text{ car } t \leqslant 100 \\ &\Longleftrightarrow t = 100\left(1 - \sqrt{0,5}\right) \end{aligned}$$

Or, $100\left(1 - \sqrt{0,5}\right) \approx 29,29$.
La bonne réponse est donc la **réponse c.**.

3. Graphiquement, on obtient que $f(x) \leqslant 0$ sur $[0; 2]$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[2; 18]$.
Les primitives de f sont donc décroissante sur $[0; 2]$ et croissantes sur $[2; 18]$.
La bonne réponse est la **réponse d.**.

4. Un intervalle de confiance, au seuil de 95%, est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$,

où f est la fréquence des personnes, sur l'échantillon, déclarant vouloir voter pour le candidat A et n la taille de l'échantillon.
Ici, on a $f = 0,535$, $f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,51$ et $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,56$.
$f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,51$ donne $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0,535 - 0,51 = 0,025$,
soit $\sqrt{n} = \dfrac{1}{0,025} = 40$, puis $n = 40^2 = 1\,600$.
La bonne réponse est la **réponse c.**.

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Comme somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,1,5]$, f est dérivable sur I.

   $$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \in \mathrm{I},\ f'(x) &= 18x \times [1 - 2\ln(x)] + 9x^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{x}\right) + 0\\ &= 18x - 36x\ln(x) - \frac{18x^2}{x}\\ &= 18x - 36x\ln(x) - 18x\\ &= -36x\ln(x)\end{aligned}$$

   b. On obtient le tableau suivant :

x	0		1		1.5
$-36x$	0	$-$		$-$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	↗	19	↘	$f(1.5)$

   avec $f(1,5) \approx 18,83$.

   c. Voir la question précédente.

2. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $$\begin{aligned}-36\ln(x) - 36 \geqslant 0 &\Leftrightarrow -36\ln(x) \geqslant 36\\ &\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{36}{-36}\\ &\Leftrightarrow \ln(x) \leq -1\\ &\Leftrightarrow x \leq \mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

   On obtient le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		1.5
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Convexité de f		Convexe		Concave	

3. a. Comme somme et produit de fonctions dérivables sur I, F est dérivables sur I, et, pour tout $x \in \text{I}$,

$\text{F}'(x) = 10 + 5 \times 3x^2 - \left(6 \times 3x^2 \ln(x) + 6x^3 \times \dfrac{1}{x}\right)$

$\text{F}'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - \dfrac{6x^3}{x}$

$\text{F}'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln(x) - 6x^2$

$\text{F}'(x) = 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln(x)$

$\text{F}'(x) = 10 + 9x^2 [1 - 2\ln(x)]$

$\text{F}'(x) = f(x)$

F est bien une primitive de f sur I.

b. $\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{F}(1,5) - \text{F}(1)$

On obtient : $\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 8,66.$

Partie B : Application économique

Proposition 1 :
« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »
La période des six derniers mois correspond à l'intervalle $[1\,;\,1,5]$.
Or, $f(1) = 19$ et $19 \times 0,75 = 14,25 > f(1,5)$, d'après la question **A. 2. c.**
La proposition est donc vraie.

Proposition 2 :
« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »
La valeur moyenne de l'action sur les six derniers mois correspond à $\dfrac{1}{1,5-1}\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\mathrm{d}x$,
soit $\dfrac{1}{0,5}\displaystyle\int_1^{1,5} f(x)\mathrm{d}x = 2 \times \int_1^{1,5} f(x)\mathrm{d}x$.
En utilisant la valeur obtenue à la quesion **A. 3. b.**, on obtient une valeur moyenne d'environ 17,33, soit strictement supérieure à 17 €.
La proposition est donc fausse.