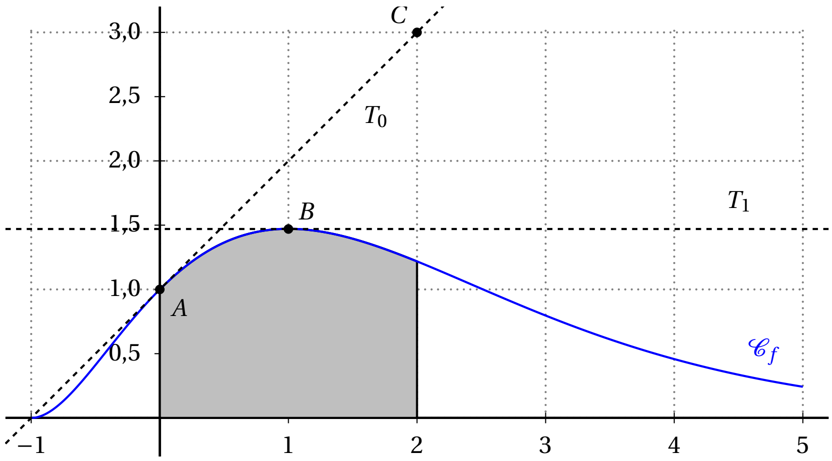
∽ Corrigé du baccalauréat ES – Asie ∾
23 juin 2016

EXERCICE 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C(2\,;3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



PARTIE A

1. La valeur exacte de $f'(1)$ est :

$\boxed{\textbf{a. } 0}$ **b.** 1 **c.** 1,6 **d.** autre réponse

La tangente en B est horizontale donc son coefficient directeur est nul : $f'(1) = 0$.

2. La valeur exacte de $f'(0)$ est :

a. 0 $\boxed{\textbf{b. } 1}$ **c.** 1,6 **d.** autre réponse

Le coefficient directeur de la droite (AC) est 1 : $f'(0) = 1$.

3. La valeur exacte de $f(1)$ est :

a. 0 **b.** 1 **c.** 1,6 $\boxed{\textbf{d. } \text{autre réponse}}$

L'ordonnée de B est un peu inférieure à 1,5.

4. Un encadrement de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par des entiers naturels successifs est :

a. $3 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4$

b. $\boxed{2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3}$

c. $1 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

d. autre réponse

En comptant les carreaux, on obtient la réponse.

Partie B

1. On admet que la fonction F définie sur $[-1;5]$ par $F(x) = -(x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

a. $f(x) = F'(x) = -(2x+4)\,\mathrm{e}^{-x} + (-(x^2+4x+5))(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2x-4+x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{x} = (x^2+2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$

b. La fonction f est positive sur $[0\,;\,2]$ donc l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=2$ est $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \left(-(4+8+5)\,\mathrm{e}^{-2}\right) - \left(-(0+0+5)\,\mathrm{e}^{0}\right) = -17\,\mathrm{e}^{-2} + 5$ u.a.

Une valeur approchée de cette aire est 2,7 ce qui valide la réponse de la question 4 de la partie A.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[1;5]$.

$f(1) = 4\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}47 > 1$ et $f(5) = 36\,\mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}24 < 1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\,;\,5]$.

En étudiant les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;5]$, on peut démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur cet intervalle.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 6 points

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

Partie A

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Pour une clé, il n'y a que deux issues : elle est défectueuse, avec une probabilité $p = 0{,}015$, ou elle n'est pas défectueuse, avec la probabilité $1-p$.
La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.
On peut en déduire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clés défectueuses dans le lot de 100 clés suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}015$.

2. Quand une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité de l'événement $X = k$ est donnée par :

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit que $p(X=0) \approx 0{,}221$ et $p(X=1) \approx 0{,}336$.

3. Au plus deux clés soient défectueuses correspond à l'événement $X \leqslant 2$:
$p(X \leqslant 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \approx 0{,}221 + 0{,}336 + 0{,}253 \approx 0{,}810$
La probabilité qu'au plus deux clés soient défectueuses est environ 0,810.

PARTIE B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98 ; 103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28 ; 33]$.

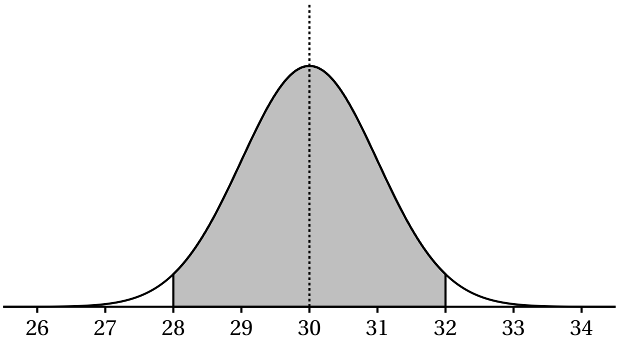
1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

   Une clé est conforme pour la lecture quand $98 \leqslant R \leqslant 103$, sachant que la variable aléatoire R suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 1$.

   La calculatrice donne $p(98 \leqslant X \leqslant 103) \approx 0{,}976$.

2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.

   Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



   La fonction densité d'une loi normale d'espérance μ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$. On sait que la droite d'équation $x = 30$ est axe de symétrie donc on peut en déduire que $\mu = 30$.

   D'après le cours, pour toute variable aléatoire W suivant une loi normale de paramètres μ et σ, on sait que $p(\mu - 2\sigma \leqslant W \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

   D'après le texte, $p(28 \leqslant W \leqslant 32) \approx 0{,}95$ et on sait que $\mu = 30$; donc $2\sigma = 2$ et donc $\sigma = 1$.

PARTIE C

Dans cette partie, on considère une grande quantité de clés devant être livrées à un éditeur de logiciels. On considère un échantillon de 100 clés prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 94 clés sont sans défaut donc la fréquence de clés sans défaut dans cet échantillon est $f = \dfrac{94}{100} = 0{,}94$.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, est donné par : $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}94 - 0{,}1 = 0{,}84$; $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}94 + 0{,}1 = 1{,}04$ que l'on remplacera par 1 car une probabilité ne peut dépasser 1. L'intervalle de confiance est donc $[0{,}84\ ;\ 1]$.

Remarque

Le programme de la classe de terminale ES précise à propos de l'intervalle de confiance :

« Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle

$$\left[f - 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\ ;\ f + 1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$$

qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme. »

Dans cet exercice on trouverait environ $[0,89\ ;\ 0,99]$ ce qui éloignerait l'inconvénient de la borne supérieure dépassant 1.

EXERCICE 3 — Élèves de ES n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques, et élèves de L — 5 points

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015 + n$.

1.
- L'année 2015 correspond à $n = 0$ et on sait que cette année-là, l'établissement compte 3 000 élèves ; donc $u_0 = 3000$.
- On sait que 10 % des élèves quittent l'établissement, donc il en reste 90 %, ce qui revient à multiplier par 0,9. Comme 250 nouveaux élèves s'inscrivent chaque année, il faut rajouter 250.
  Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$, donc $u_n = v_n + 2500$.

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9\,u_n + 250 - 2500 = 0,9\,(v_n + 2500) - 2250 = 0,9\,v_n + 2250 - 2250 = 0,9\,v_n$
$v_0 = u_0 - 2500 = 3000 - 2500 = 500$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 500$.

b. D'après le cours, on peut dire que pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n$.
Comme $u_n = v_n + 2500$, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.

3. $u_{n+1} - u_n = \left(500 \times 0,9^{n+1} + 2500\right) - (500 \times 0,9^n + 2500) = 500 \times 0,9 \times 0,9^n - 500 \times 0,9^n = (450 - 500) \times 0,9^n$
$= -50 \times 0,9^n$

Pour tout n, $-50 \times 0,9^n < 0$; on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.

4. La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
On veut déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif ; cela arrivera la première année pour laquelle l'effectif sera inférieur ou égal à 2 800.
Comme la suite (u_n) est décroissante, ce sera également le cas pour les années qui suivront.
Voici un algorithme qui répond au problème :

Variables	n entier et u réel
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 3 000

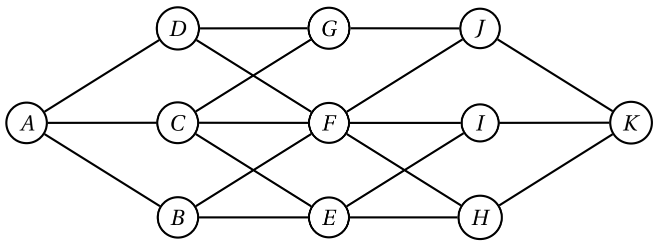
Traitement	Tant que $u > 2800$ faire
	  n prend la valeur $n + 1$
	  u prend la valeur $0,9 \times u + 250$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher n

EXERCICE 3 Élèves de ES ayant suivi la spécialité mathématiques 5 points

PARTIE A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous



1. Une chaîne eulérienne contenue dans un graphe est un chemin qui part d'un sommet et qui passe par toutes les arêtes pour arriver à un autre sommet, ou au même (il s'agit alors d'un cycle eulérien).
   D'après le théorème d'EULER, un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède exactement zéro ou deux sommets de degrés impairs.
   Déterminons les degrés des sommets de ce graphe :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degrés	3	3	4	3	4	6	3	3	3	3	3

   Ce graphe possède plus de deux sommets de degrés impairs, donc il ne contient pas de chaîne eulérienne.

2. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. La matrice d'adjacence du graphe est composée de 0 et de 1. On met un 0 à la ligne i et la colonne j s'il n'existe pas d'arête entre le sommet numéro i et le sommet numéro j. S'il y en a une, on met 1.
   La lettre a est située à la ligne 3 et la colonne 4 ; ce sera donc 0 s'il existe une arête entre le sommet 3 (C) et le sommet 4 (D). Il n'y a pas d'arête reliant C à D donc $a = 0$.
   La lettre b, située ligne 4 et colonne 7, marque s'il existe une arête entre le sommet 4 (D) et le sommet 7 (G). C'est le cas donc $b = 1$.
   La lettre c marquera une arête entre les sommets 9 (I) et 5 (E) ; il y en a une donc $c = 1$.
   La lettre d marquera une arête entre les sommets 11 (K) et 5 (E) ; il n'y en a pas donc $d = 0$.

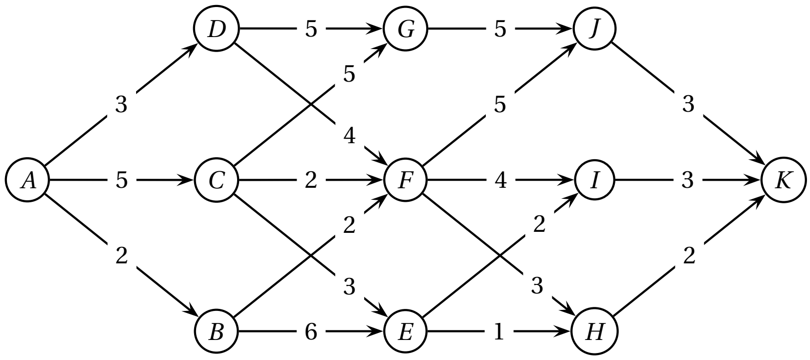
   b. On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Le sommet A est le numéro 1 ; le sommet J est le numéro 10. Le nombre de chemins de longueur 3 est le nombre situé dans la matrice M^3 à la ligne 1 et la colonne 10. C'est 5 donc il y a 5 chemins de longueur 3 reliant A à J.
Ce sont : $AD - DF - FJ$; $AD - DG - GJ$; $AC - CG - GJ$; $AC - CF - FJ$; $AB - BF - FJ$

PARTIE B

On oriente et on pondère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Pour déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K, on utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	2 A	5 A	3 A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B (A)
		5 A	3 A	8 B	4 B	∞	∞	∞	∞	∞	D (A)
		5 A		8 B	4 B ~~7 D~~	8 D	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	F (B)
		5 A		8 B		8 D	7 F	8 F	9 F	∞	C (A)
				8 B ~~8 C~~		8 D ~~10 C~~	7 F	8 F	9 F	∞	H (F)
				8 B		8 D		8 F	9 F	9 H	E (B)
						8 D		8 F ~~10 E~~	9 F	9 H	G (D)
								8 F	9 F ~~13 G~~	9 H	I (F)
									9 F	9 H ~~11 I~~	J (F)
										9 H ~~11 J~~	K (H)

Le chemin de longueur minimale 9 km entre A et K est : $\mathrm{A} \xrightarrow{2} \mathrm{B} \xrightarrow{2} \mathrm{F} \xrightarrow{3} \mathrm{H} \xrightarrow{2} \mathrm{K}$

Exercice 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

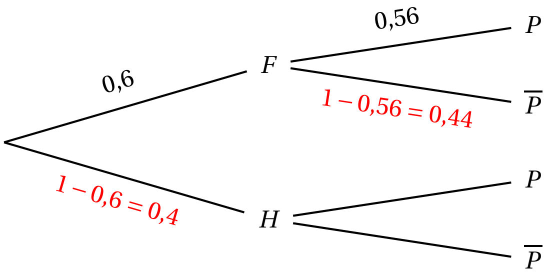
D'après une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que :

- 60 % de la population sont des femmes ;
- 56 % des femmes travaillent à temps partiel ;
- 36 % de la population travaillent à temps partiel.

On interroge une personne dans la population. Elle affirme qu'elle travaille à temps partiel.
On note :

- F l'événement « la personne interrogée est une femme » ;
- H l'événement « la personne interrogée est un homme » ;
- P l'événement « la personne interrogée travaille à temps partiel » ;
- $\overline{P}$ l'événement « la personne interrogée ne travaille pas à temps partiel ».

On regroupe les données du texte dans un arbre pondéré :



On cherche à déterminer la probabilité que la personne interrogée soit un homme, c'est à dire :

$$p_P(H) = \frac{p(P \cap H)}{p(P)}.$$

D'après le texte, $p(P) = 0{,}36$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = p(F) \times p_F(P) + p(H \cap P)$.
On en déduit que $0{,}36 = 0{,}6 \times 0{,}56 + p(H \cap P)$ donc que $p(H \cap P) = 0{,}36 - 0{,}6 \times 0{,}56 = 0{,}024$.
Donc $p_P(H) = \dfrac{p(P \cap H)}{p(P)} = \dfrac{0{,}024}{0{,}36} = \dfrac{1}{15}$