Corrigé du baccalauréat ES Métropole
16 juin 2017

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

1. **a.** La variableT_1 suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 12]$. Donc $P(T_1 \geqslant 5) = \dfrac{12-5}{12-0} = \dfrac{7}{12}$.

   b. Le temps moyen se calcule avec l'espérance. L'espérance d'une loi uniforme sur un intervalle $[a ; b]$ est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

   Donc $E(T_1) = \dfrac{0+12}{2} = 6$ (minutes).

2. La variable T_2 suit la loi normale de paramètres : $\mu = 5$ et $\sigma = 1{,}5$.
   Donc $P(0{,}75 \leqslant T_2 \leqslant 6) \approx 0{,}745$ (avec la calculatrice).

3. **a.** On est dans le cas d'un répétition dans les mêmes conditions de 10 expériences qui n'ont que deus issues, donc la variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et de probabilité $p = 0{,}1$.

   b. $P(X=0) = \dbinom{10}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^{10} = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$.

4. Cherchons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
   La fréquence théorique de tickets gagnants est $p = 0{,}9$ et l'échantillon est de taille $n = 860$.
   On a $n \geqslant 30$, $np = 774 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 86 \geqslant 5$; on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ~;~ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

   Or $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}879$ et $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}921$.
   Finalement $I_{860} \approx [0{,}879 ; 0{,}921]$.
   Calculons la fréquence de satisfaction : $f = \dfrac{763}{860} \approx 0{,}887$.
   $f \in I_{860}$ donc on ne peut pas raisonnablement mettre en doute les affirmations de ce gérant.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Partie A

1. Calculons u_1 (nombre d'adhérents au 1er février) et u_2 (nombre d'adhérents au 1er mars).
   $u_1 = 0{,}75 \times 900 + 12 = 687$ et $u_2 = 0{,}75 \times 687 + 12 = 527{,}25$, soit environ 527 adhérents au 1er mars 2017.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 48$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 48 = 0{,}75u_n + 12 - 48 = 0{,}75u_n - 36 \\ &= 0{,}75 \times \left(u_n - \frac{36}{0{,}75}\right) = 0{,}75 \times (u_n - 48) = 0{,}75 \times v_n. \end{aligned}$$

   La relation $v_{n+1} = 0{,}75 \times v_n$, vraie pour tout entier naturel n, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. $v_0 = u_0 - 48 = 852$.
Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 852 \times 0{,}75^n$.

c. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - 48$ donc $u_n = v_n + 48$.
Donc $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.

d. On cherche le premier entier naturel n tel que $u_n \leqslant 100$.
$u_n \leqslant 100 \iff 852 \times 0{,}75^n + 48 \leqslant 100 \iff 852 \times 0{,}75^n \leqslant 100 - 48 \iff$
$852 \times 0{,}75^n \leqslant 52 \iff 0{,}75^n \leqslant \dfrac{52}{852} \iff \ln\left(0{,}75^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{52}{852}\right)$
$\iff n \times \ln(0{,}75) \leqslant \ln\left(\dfrac{52}{852}\right)$. Or $\ln(0{,}75) < 0$ donc
$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{52}{852}\right)}{\ln(0{,}75)}$ et $\dfrac{\ln\left(\dfrac{52}{852}\right)}{\ln(0{,}75)} \approx 9{,}7$ donc $n \geqslant 10$.
La présidente démissionnera donc au bout de 10 mois.

Partie B

1. Algorithme complété :

Variables :	S est un nombre réel
	N est un entier
	U est un nombre réel
Initialisation :	S prend la valeur 0
	U prend la valeur 900
Traitement :	Pour N allant de 1 à 12 :
	Affecter à S la valeur $S + 10 \times U$
	Affecter à U la valeur $0{,}75U + 12$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

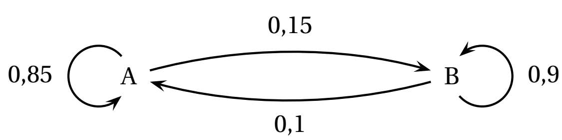
2. Soit u_n le nombre d'adhérents pour le mois n, n étant un entier naturel compris entre 0 et 11. Chaque adhérent verse 10 €, donc pour chaque mois, la somme récoltée sera de $10 \times u_n$. On a donc :
$S = 10 \times u_0 + 10 \times u_1 + 10 \times u_2 + \ldots\ldots + 10 \times u_{11} = 10 \times (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{11})$.
Or pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 48$ et la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$.
Donc $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_{11} = v_0 \times \dfrac{1 - q^{12}}{1 - q} = 852 \times \dfrac{1 - 0{,}75^{12}}{1 - 0{,}75} \approx 3300$.
Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots u_{11} = v_0 + 48 + v_1 + 48 + v_2 + 48 + \cdots\cdots + v_{11} + 48$
$= 3300 + 12 \times 48 \approx 3876$.
Pour finir $S = 10 \times 3876 = 38760$.
Le montant total des cotisations pendant l'année 2017 s'élèvera à environ 38 760 euros.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La première énigme est facile, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Donc $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Le graphe probabiliste :



3. La matrice M associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Puis $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.
On pose $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a $P_{n+1} = P_n \times M$.

Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85a_n + 0,1b_n & 0,15a_n + 0,9b_n \end{pmatrix}$

Donc $a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,85a_n + 0,1 - 0,1a_n$
$= 0,75a_n + 0,1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$.

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,75a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75a_n - 0,3$
$= 0,75 \times \left(a_n - \dfrac{0,3}{0,75}\right) = 0,75 \times (a_n - 0,4) = 0,75v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de 1er terme $v_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

b. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,6 \times 0,75^{n-1}$.
De plus pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = a_n - 0,4$ donc $a_n = v_n + 0,4$.
Donc $a_n = 0,6 \times 0,75^{n-1} + 0,4$.
Or $0,6 = 0,8 \times 0,75$ donc $a_n = 0,6 \times 0,75 \times 0,75^{n-1} + 0,4 = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et $q \in]-1\ ;\ 1[$ donc la limite de (v_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à zéro.

d. Calculons à présent la limite de la suite (a_n). Comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = v_n + 0,4$, on peut en déduire que la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à 0,4. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 1 - a_n$, la limite de la suite (b_n) est donc $1 - 0,4 = 0,6$.

La probabilité d'obtenir une question facile sera donc de 0,4, celle d'une question difficile sera de 0,6; il y aura donc plus de chance d'avoir une question difficile plutôt qu'une question facile.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a vu que $a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$, donc $a_n \geqslant 0,4$; on en déduit que $b_n \leqslant 0,6$.

La probabilité d'obtenir une question difficile sera donc majorée par 0,6, ce qui contredit l'affirmation de la revue spécialisée en jeux vidéo.

Partie B

À l'aide de l'algorithme de Dijkstra :

Départ-Sommet	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2,A	6,A	10,A	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
B(2)			~~6,A~~ 5,B	10,A	$+\infty$	$+\infty$	17,B
C(5)				~~10,A~~ 9,C	14,C	$+\infty$	17,B
D(9)					~~14,C~~ 12,D	$+\infty$	17,B
E(12)						13,E	~~17,B~~ 16,E
F(13)							16,E

Le tracé le plus cours entre A et G est donc : A $\xrightarrow{2}$ B $\xrightarrow{3}$ C $\xrightarrow{4}$ D $\xrightarrow{3}$ E $\xrightarrow{4}$ G
Il durera 16 minutes.

EXERCICE 3 — 6 POINTS

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-3x+2$.

   $-3x+2 \geqslant 0 \iff -3x \geqslant -2 \iff 3x \leqslant 2 \iff x \leqslant \dfrac{2}{3}$.

   $f(0) = 1$ $\qquad f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{3} \approx 2{,}463$ $\qquad f(1) = 0$

   Tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}^2}{3}$	$\searrow$	0

2. La dernière ligne donnée par le logiciel de calcul formel, donne une factorisation de la dérivée seconde de f : $f''(x) = 3\mathrm{e}^{3x}(1-3x)$.

   Or pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $3\mathrm{e}^{3x} > 0$, donc $f''(x)$ s'annule et change de signe lorsque $1-3x$ s'annule et change de signe.

   $1-3x = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(1-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{3\times\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}$.

   Les coordonnées du point d'inflexion sont donc : $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}$.

Partie B

1. $f(0) = (1-0)\mathrm{e}^0 = 1$ et $g(0) = 0-0+1 = 1$

   $f(1) = (1-1)\mathrm{e}^3 = 0$ et $g(1) = 1-2+1 = 0$

   Les points A et B sont donc des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. **a.** Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{3x} \geqslant \mathrm{e}^0 \iff \mathrm{e}^{3x} \geqslant 1$
   $\iff \mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$.

   b. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$.

   La somme de deux nombres positifs ou nuls étant positive ou nulle, on en déduit que $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.

   c. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\left(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x\right)$.

   Or d'après la question précédente, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.

   Donc pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) - g(x)$ a le même signe que $1-x$. Or sur cet intervalle $1-x \geqslant 0$, donc pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

3. **a.** Une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est définie par $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1$.

   $G(1) = \dfrac{1}{3} - 1 + 1 = \dfrac{1}{3}$ et $G(0) = 0$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$.

   b. L'aire de la partie grisée se calcule avec l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$.

   $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 4}{9} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 7}{9} \approx 1{,}5$ u.a.

EXERCICE 4 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. $P(X=1) = \dfrac{\ln(2)-\ln(1)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)} \approx 0{,}301$.

2. **a.** Calculons la fréquence. $f = \dfrac{11094}{36677} \approx 0{,}302$.

Ce résultat est donc très proche de $P(X=1)$.

Pour confirmer cette hypothèse, cherchons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

On a $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}2963$ et $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}3057$.

Finalement $I \approx [0{,}2963\ ;\ 0{,}3057]$.

La fréquence de communes dont la population est un nombre commençant par 1 est environ 0,302.

$0{,}302 \in I$ donc l'hypothèse ne peut pas raisonnablement être remise en doute.

Cette observation est donc compatible avec l'affirmation : le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford.

b. À de très rares exceptions (personnes de petites tailles, ou personnes très grandes), la taille la plus courante pour un candidat au baccalauréat est comprise entre 100 cm et 199 cm.

Donc cela correspond au cas où $X = 1$ (cas ultra-majoritaire).

On s'attend donc à trouver $P(X=1) \approx 1$. Mais d'après la première question, $P(X=1) \approx 0{,}301$.

La loi de Benford n'est donc absolument pas adaptée à ce cas.