Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
18 avril 2012

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. Il y a $\binom{50}{5} = \dfrac{50!}{5! \times (50-5)!} = 2\,118\,760$ groupes différents de 5 coureurs.
2. **a.** L_1 et L_3 n'ont pu être obtenus avec cet algorithme puisqu'ils contiennent des éléments identiques. Les deux autres oui.

   b. Cet algorithme permet chaque jour de tirer au sort 5 coureurs pour subir un contrôle antidopage.
3. Un joueur étant choisi, on peut lui adjoindre $\binom{49}{4}$ groupes de 4 coureurs différents sur les 49 restants.
   La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour cette étape est donc égale à $\dfrac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{49!}{4! \times 45!} \times \dfrac{5! \times 45!}{50!} = \dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.
4. **a.** Les tirages de groupes de 5 sont chaque jour indépendants les uns des autres et la probabilité d'être choisi pour un des 50 coureurs est égale à 0,1 : la loi X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

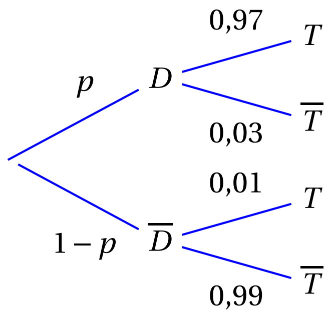
   b. — On a $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,1^5 \times (1-0,1)^{10-5} = 252 \times 0,1^5 \times 0,9^5 \approx 0,001\,48$ soit environ 0,001 5

   — $p(X = 0) = 0,1^0 \times 0,9^{10} \approx 0,348\,7$.

   — On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,651\,3$.

Partie B

1. En notant $p(D) = p$, on peut construire l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales :
$p(T) = p_D(T) \times p(D) + p_{\overline{D}}(T) \times p\left(\overline{D}\right)$ ou encore
$0,05 = 0,97p + 0,01(1 - p) \iff 0,05 = 0,97p + 0,01 - 0,01p \iff$
$0,96p = 0,04 \iff p = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$. (un peu plus de 2 coureurs sur 50)

2. Il faut calculer $p_T\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(T \cap \overline{D}\right)}{p(T)} = \dfrac{0,01\left(1 - \frac{1}{24}\right)}{0,05} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{23}{24} = \dfrac{23}{120} \approx 0,19.$

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Proposition 1

Un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite $\mathscr{D}$ a pour cordonnées $(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$;
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ normal au plan $\mathscr{P}$ a pour cordonnées $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$.
Comme $\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{u}$, les vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, donc la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. VRAIE

Proposition 2

Calculons la distance de O au plan $\mathscr{P}$:
$d(\text{O}, \mathscr{P}) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \neq 2$
La distance n'étant pas égale au rayon de la sphère, la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$.
Rem. Comme $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < 2$, on peut dire que la sphère et le plan sont sécants.

Proposition 3

Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$ si ses coordonnées vérifient les deux équations :
$\left\{\begin{array}{lcl} x - y - z - 2 & = & 0 \\ x + y + 3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x - y & = & z + 2 \\ x + y & = & -3z \end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme) $2x = -2z + 2 \iff$
$x = -z + 1$.
En reportant dans la première équation on obtient :
$-z + 1 - y = z + 2 \iff -2z - 1 = y$.
Finalement en posant $z = t'$, on a :
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \iff \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1 - t' \\ y & = & -1 - 2t' \\ z & = & t' \end{array}\right.$ VRAIE
Remarque : on peut aussi vérifier que les points de Δ appartiennent aux deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Proposition 4

Un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite $\mathscr{D}$ a pour cordonnées $(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$;
Un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite Δ a pour cordonnées $(-1\ ;\ -2\ ;\ 1)$;
$\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas parallèles ; si elles sont sécantes il existe un point $M(x\ ;\ y\ :\ z)$ dont les cordonnées vérifient les deux représentations paramétriques soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl}-3-2t &=& 1-t'\\ 2t &=& -1-2t'\\ 1+2t & & t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}t' &=& 2t+4\\ 2t' &=& -1-2t\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}1+2t &=& 2t+4\\ 2(1+2t) &=& -1-2t\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl}0t &=& 3\\ 6t &=& -3\\ t' &=& 1+2t\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution : les droites $\mathscr{D}$ et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires. FAUSSE

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire de la surface limitée par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

   b. $f_{n+1}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx} \times \mathrm{e}^{-x}}{1+x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \times \mathrm{e}^{-x} = f_n(x) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$. En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $f_n(x) > 0$, on obtient :
   $f_n(x) \times \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \times 1$, soit finalement :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
   Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des fonctions continues f_{n+1} et f_n :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

2. **a.** $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1+x \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
   D'autre part on sait que pour $1+x \geqslant 1$, on a $(1+x)^2 \geqslant 1+x \iff$
   $\dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.
   Enfin il est évident que $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} > 0$, donc finalement :
   $$0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

   b. Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des inégalités précédentes on obtient
   $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ soit encore
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \left[-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :

$0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant -\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n} - 1\right)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n} - 1\right) = 0$.

Conclusion d'après le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

3. a. Posons $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{1+x} & v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ u'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$; en intégrant par parties on a donc :

$I_n = \left[-\dfrac{1}{n(1+x)}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$;

$I_n = \left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2n} + \dfrac{1}{n}\right] - \dfrac{1}{n}J_n$ ou encore

$I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right)$.

b. Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n \neq 0$:

$nI_n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} nI_n = 1$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $I_n \approx \dfrac{1}{n}$.

Exemple : pour $n = 10$, la calculatrice donne $I_{10} \approx 0,091 \approx \dfrac{1}{10}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissances

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. a. On a $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1 - (-2 + \mathrm{i})}{\overline{-2 + \mathrm{i}} - 1} = \dfrac{3 - \mathrm{i}}{-3 - \mathrm{i}} = \dfrac{(3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})}{(-3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})} = \dfrac{-9 + 1 + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}}{9 + 1} = \dfrac{-8 + 6\mathrm{i}}{10} = -\dfrac{4}{5} + \mathrm{i}\dfrac{3}{5}$.

b. De $\left|z_{\mathrm{C}'}\right|^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25} = 1$, on déduit que le point C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

$\left|z_{\mathrm{C}'}\right| = \mathrm{OC}' = 1$ ce qui montre que C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

c. Calculons $\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{A}}}{z_{\text{C}'}-z_{\text{A}}}=\dfrac{-2+\text{i}-1}{\frac{-4+3\text{i}}{5}-1}=\dfrac{-15+5\text{i}}{-9+3\text{i}}=\dfrac{5(-3+\text{i})}{3(-3+\text{i})}=\dfrac{5}{3}\in\mathbb{R}$.

L'argument de ce quotient est donc nul, soit $\left(\overrightarrow{\text{AC}}\,,\,\overrightarrow{\text{AC}'}\right)=0\pmod{2\pi}$, ce qui signifie que les points A, C et C$'$ sont alignés.

2. Les points qui ont pour image le point A d'affixe 1 ont une affixe $z\neq 1$ telle que :
$z'=1=\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$.
En posant $z=x+\text{i}y$, l'équation précédente s'écrit :
$1=\dfrac{1-x-\text{i}y}{x-\text{i}y-1}\iff x-\text{i}y-1=1-x-\text{i}y\iff 2x-2=0\iff x=1$
Les points solutions ont donc pour affixe $z=1+\text{i}y$ avec $y\neq 0$: ce sont les points de la droite Δ d'équation $x=1$ privée du point A.

3. On a pour $z\neq 1$, $\quad\left|z'\right|=\left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right|=\dfrac{|1-z|}{\left|\overline{z}-1\right|}=\dfrac{|1-x-\text{i}y|}{|x-\text{i}y-1|}=\dfrac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=1$.
On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z\neq 1$, $\left|z'\right|=\text{O}M'=1$.
Tous les points M' appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

4. Calculons pour $z\neq 1$, le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1}=\dfrac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1}=\dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)(\left(\overline{z}-1\right)}$.
Le numérateur : $1-z-\overline{z}+1=2-\left(z+\overline{z}\right)=2-2x\in\mathbb{R}$;
Le dénominateur : $(z-1)(\left(\overline{z}-1\right)=(z-1)\overline{z-1}=|z-1|^2\in\mathbb{R}_+$ (réel positif).
Finalement $\dfrac{z'-1}{z-1}\in\mathbb{R}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z'-1=k(z-1)$ ou encore $\overrightarrow{\text{A}M'}=k\overrightarrow{\text{A}M}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

5. D'après la question précédente, D$'$ est aligné avec A et D, donc
- D$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$;
- D$'$ est sur la droite (AD).
La construction est donc évidente.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissance

Partie B Inverse de 23 modulo 26

1. $23\times(-9)-26\times(-8)=-207+208=1$: le couple $(-9\,;\,-8)$ est solution de l'équation (E).

2. $\left\{\begin{array}{lcl}23x-26y&=&1\\23\times(-9)-26\times(-8)&=&1\end{array}\right.\implies$ (par différence membre à membre)
$23(x+9)-26(y+8)=0\iff 23(x+9)=26(y+8)\quad(1)$

Donc 23 divise $26(y+8)$ et comme il est premier avec 26 ; il divise $y+8$ (théorème de Gauss) : il existe donc un entier k tel que $y+8=23k \iff y=-8+23k$.

En remplaçant dans (1) $y+8$ par $23k$, on obtient :

$23(x+9)=26\times 23k \iff x+9=26 \iff x=-9+26k$.

Réciproquement les couples $(-9+26k\ ;\ -8+23k)$ vérifient (E) car

$23(-9+26k)-26(-8+23k)=-207+23\times 26k+208-26\times 23k=1$.

Les couples solutions de (E) sont donc de la forme : $(-9+26k\ ;\ -8+23k)$, $k\in n\mathbb{Z}$.

3. Il faut trouver un (ou des) couple(s) de premier terme a tel que $0\leqslant a\leqslant 25$, donc vérifiant :

$0\leqslant -9+26k\leqslant 25 \iff 9\leqslant 26k\leqslant 34$. La solution $k=1$ est évidente ce qui donne $a=-9+26=17$.

Donc comme $26b\equiv 0 \pmod{26}$, on a $23\times 17\equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C Chiffrement de Hill

1. $\underbrace{\text{ST}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape1}}{\Longrightarrow} (18,\ 19) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (21,\ 20) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{VU}}_{\text{mot codé}}$

2. a. $(S_1)\left\{\begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1+3x_2 & \pmod{26}\\ y_2 & \equiv & 7x_1+4x_2 & \pmod{26}\end{array}\right. \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lcll} -44x_1-12x_2 & = & -4y_1 & \pmod{26}\\ 21x_1+12x_2 & = & 3y_2 & \pmod{26}\end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme)

$-23x_1=-4y_1+3y_2 \pmod{26}$.

De même :

$(S_1)\left\{\begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1+3x_2 & \pmod{26}\\ y_2 & \equiv & 7x_1+4x_2 & \pmod{26}\end{array}\right. \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lcll} -77x_1-21x_2 & = & -7y_1 & \pmod{26}\\ 77x_1+44x_2 & = & 11y_2 & \pmod{26}\end{array}\right. \Longrightarrow$ (par somme)

$23x_2=-7y_1+11y_2 \pmod{26}$ ou encore puisque

$-7\equiv 19 \pmod{26}$:

$23x_2=19y_1+11y_2 \pmod{26}$.

Donc, tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{lcll} 23x_1 & \equiv & 4y_1+23y_2 & \pmod{26}\\ 23x_2 & \equiv & 19y_1+11y_2 & \pmod{26}\end{array}\right.$$

b. On a vu à la partie B que $23\times 17\equiv 1 \pmod{26}$ (23 a pour inverse 17 modulo 26), donc en multipliant chaque membre du système (S_2) par 17, on obtient

$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{lcll} 23x_1\times 17 & \equiv & 4y_1\times 17+23y_2\times 17 & \pmod{26}\\ 23x_2\times 17 & \equiv & 19y_1\times 17+11y_2\times 17 & \pmod{26}\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 68y_1+391y_2 & \pmod{26}\\ x_2 & \equiv & 323y_1+187y_2 & \pmod{26}\end{cases}$$

Or $68 \equiv 16 \pmod{26}$, $391 \equiv 1 \pmod{26}$, $323 \equiv 11 \pmod{26}$, $187 \equiv 5 \pmod{26}$, donc finalement tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système

$$(S_3)\ \begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1+y_2 & \pmod{26}\\ x_2 & \equiv & 11y_1+5y_2 & \pmod{26}\end{cases}$$

c. On calcule $11x_1+3x_2 = 11\left(16y_1+y_2\right)+3\left(11y_1+5y_2\right) = 176y_1+11y_2+33y_1+15y_2 = 209y_1+26y_2$.

Or $209 \equiv 1 \pmod{26}$ et $26 \equiv 0 \pmod{26}$, donc

$11x_1+3x_2 \equiv 1y_1+0y_2 \pmod{26}$.

De même $7x_1+4x_2 = 7\left(16y_1+y_2\right)+4\left(11y_1+5y_2\right) = 112y_1+7y_2+44y_1+20y_2 = 156y_1+27y_2$.

Or $146 \equiv 0 \pmod{26}$ et $27 \equiv 1 \pmod{26}$, donc

$7x_1+4x_2 \equiv 0y_1+1y_2 \pmod{26}$.

Conclusion : tout couple $(x_1\ ;\ x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1).

Finalement les systèmes (S_1) et (S_3) sont équivalents.

d. Pour YJ le couple $\left(y_1\ ;\ y_2\right) = (24\ ;\ 9)$. En appliquant les équations de (S_3) on obtient :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 16\times 24+9 & \pmod{26}\\ x_2 & \equiv & 11\times 24+5\times 9 & \pmod{26}\end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 393 & \pmod{26}\\ x_2 & \equiv & 309 & \pmod{26}\end{cases}$$

Or $393 = 26\times 15+3$, donc $393 \equiv 3 \pmod{26}$;

$309 = 26\times 11+23$, donc $269 \equiv 23 \pmod{26}$.

On a donc $(x_1\ ;\ x_2) = (3\ ;\ 23)$ et en utilisant le tableau le mot décodé est donc **DX**.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 4