Baccalauréat S Amérique du Sud 21/11/2013
Corrigé

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^{1-x}$.

1. $\text{e}^{1-x} = \text{e} \times \text{e}^{-x} = \dfrac{\text{e}}{\text{e}^x}$ donc $f(x) = \text{e} \times \dfrac{x}{\text{e}^x}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{1-x} = +\infty$ (par composition).

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{1-x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x\,\text{e}^{1-x} = -\infty \text{ (par produit) ; } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

3. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\text{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}\,\frac{x}{\text{e}^x} = 0$.

   On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ce qui veut dire que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 \times \text{e}^{1-x} + x(-1)\,\text{e}^{1-x} = \text{e}^{1-x}(1-x)$

5. Pour tout réel x, $\text{e}^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

   $f(1) = 1\,\text{e}^0 = 1$, d'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. $$\begin{aligned}(1-x)\,g_n(x) &= (1-x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\\ &\quad - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

2. Pour tout x, $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ donc $g_n'(x) = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = h_n(x)$.

   Or, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$;

   g_n est une fonction rationnelle de type $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

   $$h_n(x) = g_n'(x) = \frac{-(n+1)\,x^n\,(1-x) - \left(1 - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)\,x^n + (n+1)\,x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

   $$= \frac{-(n+1)\,x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, où $f(x) = x\,\text{e}^{1-x}$.
$S_n = 1 + 2\,\text{e}^{-1} + \cdots + n\,\text{e}^{1-n} = 1 + 2\,\text{e}^{-1} + \cdots + n\left(\text{e}^{-1}\right)^{n-1} = h_n\left(\text{e}^{-1}\right)$.
Or $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(1-x)^2}$ donc $h_n\left(\text{e}^{-1}\right) = \dfrac{n\left(\text{e}^{-1}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\text{e}^{-1}\right)^n + 1}{\left(1 - \left(\text{e}^{-1}\right)\right)^2}$;

$$S_n = \dfrac{\dfrac{n}{\text{e}^{n+1}} - \dfrac{n+1}{\text{e}^n} + 1}{\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}}\right)^2}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\text{e}^n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{\text{e}^{n+1}} = 0$.
De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ comme limites en $+\infty$ de fonctions rationnelles, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.
$\dfrac{n}{\text{e}^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n+1}{\text{e}^{n+1}}$; donc par produit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n+1}{\text{e}^{n+1}} = 1 \times 0 = 0$.
$\dfrac{n+1}{\text{e}^n} = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n}{\text{e}^n}$; donc par produit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n}{\text{e}^n} = 1 \times 0 = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}}\right)^2} = \dfrac{\text{e}^2}{(\text{e}-1)^2}$.

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées $(0,0,0)$, B$(1,0,0)$, D$(0,1,0)$ et E$(0,0,1)$.
$\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ donc le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$.
La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{DF}}$ de coordonnées $(1,-1,1)$; de plus elle passe par le point D$(0,1,0)$.
La droite (FD) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1,-1,1)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\text{EB}}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}$ directeurs du plan (BGE).
$\overrightarrow{\text{EB}}$ a pour coordonnées $(1,0,-1)$; $\vec{n}.\overrightarrow{\text{EB}} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{EB}}$.
$\overrightarrow{\text{EG}} = \overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}}$ a pour coordonnées $(1,1,0)$; $\vec{n}.\overrightarrow{\text{BG}} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{EG}}$.
Donc le vecteur $\vec{n}\,(1,-1,1)$ est normal au plan (BGE).
Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par le point B ; c'est l'ensemble des points M$\left(x, y, z\right)$ tels que $\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{BM}}$.
$\overrightarrow{\text{BM}}$ a pour coordonnées $\left(x-1, y, z\right)$;
$\vec{n} \perp \overrightarrow{\text{BM}} \iff 1 \times (x-1) + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \iff x - y + z - 1 = 0$.
L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z - 1 = 0$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{\text{DF}}$ est égal au vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).
Les coordonnées $\left(x, y, z\right)$ du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 1-t\\ z &=& t\\ x-y+z-1 &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 1-t\\ z &=& t\\ t-(1-t)+t-1 &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 1-t\\ z &=& t\\ 3t &=& 2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}\\ y = \frac{1}{3}\\ z = \frac{2}{3}\\ t = \frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,,\dfrac{1}{3}\,,\dfrac{2}{3}\right)$.

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc BE = EG = BG = $\sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur BH $= \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BEG vaut $\dfrac{\text{EG}\times\text{BH}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\dfrac{\text{aire(BEG)}\times\text{KD}}{3}$.

Dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\overrightarrow{\text{AB}}\,,\overrightarrow{\text{AD}}\,,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$:

$\text{KD}^2 = (x_D-x_K)^2+\left(y_D-y_K\right)^2+(z_D-z_K)^2 = \left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{9}$

donc $KD = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $\quad z^2-2z\sqrt{3}+4=0$.

1. On résout l'équation (E) : $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$; $\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times4 = 12-16 = -4$.

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$z' = \dfrac{-\left(-2\sqrt{3}\right)+\text{i}\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}+2\,\text{i}}{2} = \sqrt{3}+\text{i}$ et $z'' = \sqrt{3}-\text{i}$.

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^n\frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.

a. $z_1 = 2^1\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^1\frac{\pi}{6}} = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{-\pi}{6}} = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3}-\text{i} = z''$

Donc z_1 est solution de l'équation (E).

b. $z_2 = 2^2\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^2\frac{\pi}{6}} = 4\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\,\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}+2\,\text{i}$

$z_3 = 2^3\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^3\frac{\pi}{6}} = 8\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{-\pi}{6}} = 8\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{-\pi}{6}\right) = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = 4\sqrt{3}-4\,\text{i}$

c. $|z_1| = 2$ donc le point M_1 d'affixe z_1 est situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 ; de plus, la partie imaginaire de z_1 est -1 donc le point M_1 est situé sur la droite d'équation $y=-1$.

Pour placer le point M_2, on utilise le fait que $|z_2| = 4$ et que $\text{Im}(z_2) = 2$.
Pour placer le point M_3, on utilise le fait que $|z_3| = 8$ et que $\text{Im}(z_3) = -4$.
$z_4 = 2^4\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^4\frac{\pi}{6}} = 16\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{6}}$; pour placer le point M_4, on utilise le fait que $|z_4| = 16$; de plus $\arg(z_4) = \dfrac{\pi}{6} = \arg(z_2)$ donc les points O, M_2 et M_4 sont alignés donc $M_4 \in (OM_2)$.
Voir la figure en annexe.

Si $n \geqslant 1$ et n pair, $(-1)^n = +1$, donc $\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^n\frac{\pi}{6}} = \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\text{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\text{i}}{2}$.

Donc si $n \geqslant 1$ pair, $z_n = 2^n\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\text{i}}{2}\right)$.

Si n impair, $(-1)^n = -1$, donc $\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^n\frac{\pi}{6}} = \text{e}^{\,\text{i}\,\frac{-\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\text{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\text{i}}{2}$.

Donc si n impair, $z_n = 2^n\,\text{e}^{\,\text{i}\,(-1)^n\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\text{i}}{2}\right)$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n\,\text{i}}{2}\right)$

4. $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = \left|2\sqrt{3} + 2\,\text{i} - \left(\sqrt{3} - \text{i}\right)\right| = \left|2\sqrt{3} + 2\,\text{i} - \sqrt{3} + \text{i}\right| = \left|\sqrt{3} + 3\,\text{i}\right|$
$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$M_2M_3 = |z_3 - z_2| = \left|4\sqrt{3} - 4\,\text{i} - \left(2\sqrt{3} + 2\,\text{i}\right)\right| = \left|4\sqrt{3} - 4\,\text{i} - 2\sqrt{3} - 2\,\text{i}\right| = \left|2\sqrt{3} - 6\,\text{i}\right|$
$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 2^2\sqrt{3}$

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a. D'après la question 4, $\ell_n = 2\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} + \cdots + 2^n\sqrt{3} = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3}$
La suite (2^n) définie pour $n \geqslant 1$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $2^1 = 2$; la somme S de ses premiers termes consécutifs est donnée par la formule :

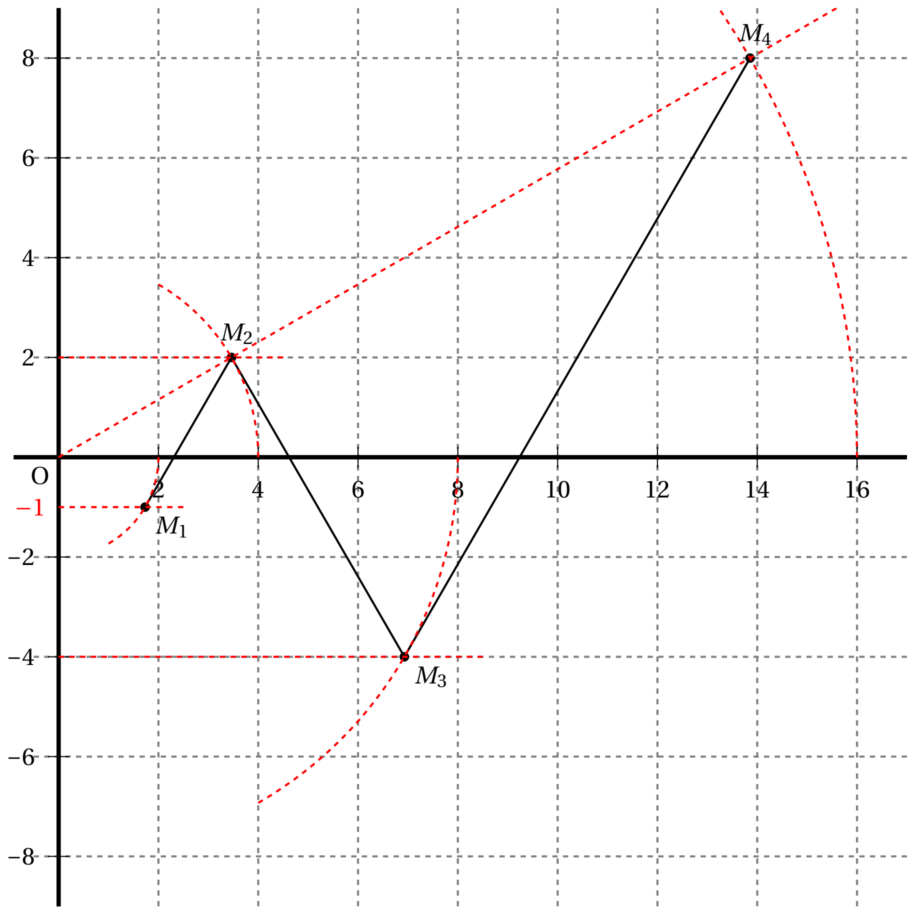
$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

donc $2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2 \times \dfrac{1-2^n}{1-2} = 2 \times \dfrac{2^n - 1}{2-1} = 2\,(2^n - 1)$
$\ell_n = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^n\right)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(2^n - 1)$

b. $\ell_n \geqslant 1000 \iff 2\sqrt{3}\,(2^n - 1) \geqslant 1000 \iff 2^n - 1 \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} \iff 2^n \geqslant \dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1$.
La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc
$\ell_n \geqslant 1000 \iff \ln(2^n) \geqslant \ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right) \iff n\ln 2 \geqslant \ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)$
Or $\ln 2 > 0$ donc
$\ell_n \geqslant 1000 \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{1000}{2\sqrt{3}} + 1\right)}{\ln 2} \iff n \geqslant 8{,}18$.
Le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$ est 9.
On peut vérifier que $\ell_8 = 510\sqrt{3} \approx 883 < 1000$ et $\ell_9 = 1022\sqrt{3} \approx 1770 > 1000$.

ANNEXE
À rendre avec la copie

Exercice 3 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P\left(A_{n+1}\right) &= P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(B_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(C_n \cap A_{n+1}\right) \\ &= P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(C_n\right) \times P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 (évènement A_n), il ne reste pas sur cette page donc $P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) = 0$.

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 (évènement B_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ donc $P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 (évènement C_n), il ira sur la page n° 1 avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ donc $P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

De plus $P\left(A_n\right) = a_n$, $P\left(B_n\right) = b_n$ et $P\left(C_n\right) = c_n$.

Donc $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \dfrac{1}{2} + c_n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{2} c_n$

On aurait pu aussi construire un arbre pondéré pour représenter la situation.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n + \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{3}{4} a_n + \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n$.

2. D'après la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0 \times a_n + \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{2} c_n \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} a_n + \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} & = & \dfrac{3}{4} a_n + \dfrac{1}{4} b_n + \dfrac{1}{4} c_n \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Donc en prenant $M = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ on a $U_{n+1} = MU_n$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $U_n = M^n U_0$.

- Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = U_0$ car M^0 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que la propriété est vraie au rang p quelconque avec $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $U_p = M^p U_0$.

  On sait que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ donc $U_{p+1} = MU_p$.

  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_p = M^p U_0$, donc $u_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$.

  Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0 ; elle est héréditaire, donc elle est pour tout $n \geqslant 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

3. Soit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

$$MU = U \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{r} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{array} \right.$$

On doit donc résoudre le système $\left\{ \begin{array}{r} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} y + z = 2x & \text{(L1)} \\ x + y + z = 4y & \text{(L2)} \\ 3x + y + z = 4z & \text{(L3)} \\ x + y + z = 1 & \text{(L4)} \end{array} \right.$

De (L2) et (L4) on déduit $4y = 1$ d'où $y = \frac{1}{4}$.

(L1) $\iff x + y + z = 3x$ ce qui donne en utilisant (L4) : $1 = 3x \iff x = \frac{1}{3}$.

(L4) $\iff z = 1 - x - y \Longrightarrow z = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Comme on n'a pas procédé par équivalences, il faut vérifier que pour les trois valeurs de x, y et z trouvées, les quatre lignes du système sont vérifiées, ce qui se fait sans problème.

L'unique matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$, est $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

4. Pour n entier non nul, on a : $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$

$$U_n = M^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{array} \right.$$

On constate que $b_n = \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 = \frac{1}{4}\left(a_0 + b_0 + c_0\right)$; or $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ donc $b_n = \frac{1}{4}$.

On sait qu'une suite géométrique de raison q où $-1 < q < 1$ est convergente vers 0 donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} = 0$.

D'après les théorèmes sur les limites, on peut dire :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 = \frac{1}{3}(a_0+b_0+c_0) = \frac{1}{3}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}a_0 + \frac{5}{12}b_0 + \frac{5}{12}c_0 = \frac{5}{12}(a_0+b_0+c_0) = \frac{5}{12}$.

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$ donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{3} \approx 33,33\,\%$ du temps de visite.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{4}$ donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée $100 \times \frac{1}{4} = 25\,\%$ du temps de visite.

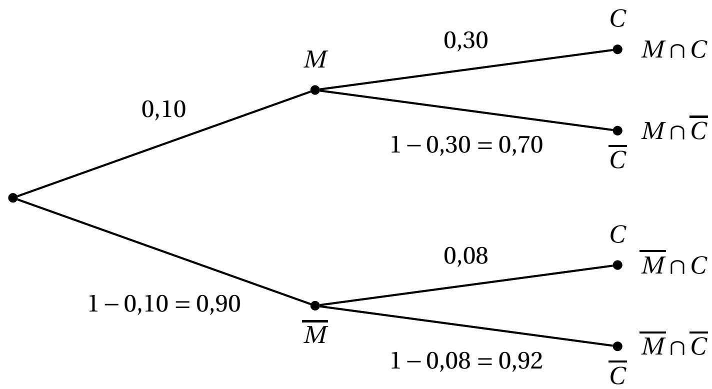
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{5}{12}$ donc à long terme, la page 3 du site sera consultée $100 \times \frac{5}{12} \approx 41,67\,\%$ du temps de visite.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. **a.** $P(M\cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

   b. D'après la formule des probabilités totales :

   $P(C) = P(M\cap C) + P\left(\overline{M}\cap C\right)$

   $\quad = P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1\times0,3+0,9\times0,08 = 0,03+0,072 = 0,102$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:

   $P_C(M) = \dfrac{P(M\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.

   Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(400\,;0{,}1)$, $P(X = 35) = \dbinom{400}{35} 0{,}1^{35}(1-0{,}1)^{400-35}$;

   le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,049 1.
3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.
   D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \approx 0{,}0357$, donc $P(X \geqslant 30) \approx 0{,}9643$.

Partie C

1. On sait que si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{400}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}1 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}1\,(1-0{,}1)}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}1 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}1\,(1-0{,}1)}}{\sqrt{400}}\right] = \left[0{,}0706\ ;\ 0{,}1294\right]$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ; $\dfrac{60}{400} = 0{,}15 \not\in I$.
   Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.