Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

Correction du Baccalauréat S Centres étrangers 10 juin 2015

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

1. La probabilité qu'un cadenas soit défectueux est $p = 0,03$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.

   On a $n = 500 \geqslant 30$, $np = 15 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 485 \geqslant 5$.

   Les conditions sont alors vérifiées pour appliquer la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

   $I_{500} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

   $= \left[0,03 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,03 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,03\times 0,97}}{\sqrt{500}}\right]$, soit environ $\boxed{[0,015\ ;\ 0,045]}$.

   La fréquence observée de cadenas défectueux est

   $f = \dfrac{19}{500} = \dfrac{38}{1\,000} = \boxed{0,038 \in I_{500}}$.

   Ce contrôle ne remet donc pas en cause, au risque de 95 %, l'affirmation du fournisseur.

2. La fréquence de cadenas défectueux est $f = \dfrac{39}{500} = \dfrac{78}{1\,000} = \boxed{0,078}$. La taille de l'échantillon est $n = 500$.

   On a $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 39$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$.

   Les conditions sont réunies pour appliquer la formule donnant l'intervalle de confiance au seuil de 95 %.

   $I'_{500} = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \dfrac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ 0,078 + \dfrac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx \boxed{[0,033\ ;\ 0,123]}$.

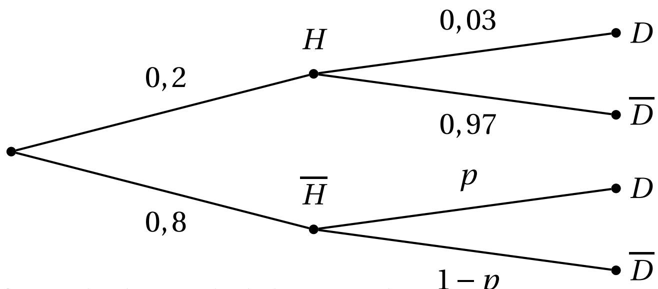
Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. $P(725 \leqslant X \leqslant 775) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx \boxed{68,3\,\%}$, soit 0,683 (d'après le cours).
   On peut aussi effectuer le calcul à la calculatrice.
2. On cherche donc le plus petit entier $n$tel que $P(X \geqslant n) < 0,05$.
   Cela équivaut à $1 - P(X < n) < 0,05 \iff P(X < n) > 0,95$.
   À la calculatrice, on cherche le nombre réel α vérifiant $P(X \leqslant \alpha) = 0,05$: n est le plus petit entier supérieur ou égal à α ; on en déduit $\boxed{n = 792}$.

Partie C

1.



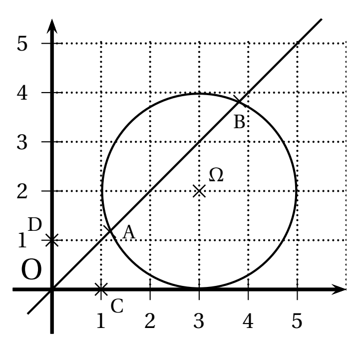
2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(D) = P_H(D) \times P(H) + P_{\overline{H}}(D) \times P\left(\overline{H}\right) = 0,2 \times 0,03 + 0,8p = \boxed{0,006 + 0,8p}$.
   Or, $P(D) = 0,07$. On en déduit que $0,006 + 0,8p = 0,07$ donc $p = \dfrac{0,07 - 0,006}{0,8}$
   $= \dfrac{0,064}{0,8} = \dfrac{64}{800} = \dfrac{8}{100} = \boxed{0,08}$.
   $0,08 \in [0,033\,;\,0,123]$, donc ce résultat est cohérent avec le résultat de la question A-2.
3. $P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{P\left(H \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \dfrac{0,194}{0,93} \approx \boxed{0,209}$.

Exercice 2 4 points

Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 :

Notons C et D les points d'affixes respectives 1 et i. Alors :$|z - 1| = |z - \mathrm{i}| \iff |z_M - z_C| = |z_M - z_D|$
$\iff MC = MD$.
L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z - \mathrm{i}|$ est donc la médiatrice de [CD], c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.
Notons Ω le point de coordonnées (3 ; 2) qui a donc pour fixe $3 + 2\mathrm{i}$.
$|z - 3 - 2\mathrm{i}| \leqslant 2. \iff |z_M - z_\Omega| \leqslant 2 \iff M\Omega \leqslant 2$. S est donc bien le segment [AB]



L'ensemble S est le segment [AB]. **VRAI**

2. Affirmation 2 : Soit $a = \sqrt{3} + \text{i}$.
$|a| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
Alors $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
On en déduit que $\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)^{1515} = \left(2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{1515\pi}{6}} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{505\pi}{2}}$.
Or $\dfrac{505\pi}{2} = \dfrac{4\times 126+1}{2}\pi = 126\times 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$.
On en déduit que $a^{1515} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\left(126\times 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = 2^{1515}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 2^{1515}\text{i} \notin \mathbb{R}$. **FAUX**

3. Affirmation 3 : $\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 2t \\ y & = & -3+4t \\ z & = & 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. est la représentation paramétrique d'une droite.
Pour $t = 1$, on obtient les coordonnées de E et pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient les coordonnées de F.
E et F appartiennent à cette droite, donc cette droite est bien la droite (EF). **VRAI**

4. Affirmation 4 : On a E(2 ; 1 ; −3), F(1 ; −1 ; 2) et G(−1 ; 3 ; 1).
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}$ ont pour coordonnées :
$\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$.
Alors : $\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}} = -1\times(-3) + (-2)\times 2 + 5\times 2 = 3-4+20 = 19$.
$\text{EF} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{30}$; $\text{EG} = \sqrt{(-3)^2+2^2+4^2} = \sqrt{29}$.
On a alors :
$\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}} = \text{EF}\times\text{EG}\times\cos\left(\widehat{\text{FEG}}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{\text{FEG}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\text{EF}}.\overrightarrow{\text{EG}}}{\text{EF}\times\text{EG}} = \dfrac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} = \dfrac{19}{\sqrt{870}}$.
À la calculatrice, on trouve $\widehat{\text{FEG}} \approx 49,89\,^{\circ} \approx 50\,^{\circ}$. **VRAI**

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

On considère a suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \text{e}^{2u_n} - \text{e}^{u_n}.$$

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - x.$$

a) g est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\text{e}^{2x} - \text{e}^{x} - 1 = \left(2\left(\text{e}^{x}\right)^2 - \text{e}^{x} - 1\right) = 2X^2 - X - 1$ en posant $X = \text{e}^{x}$.

$2X^2 - X - 1$ a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$ donc $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X + \dfrac{1}{2}\right) = (X-1)(2X+1)$.

On en déduit : $g'(x) = \left(\text{e}^x - 1\right)\left(2\text{e}^x + 1\right)$

b) Pour tout x réel, $\text{e}^x > 0$ donc $2\text{e}^x + 1 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $\left(\text{e}^x - 1\right)$.

$\text{e}^{x-1} = 0$ pour $x = 0$ et $\text{e}^x - 1 > 0 \iff \text{e}^x > 1 \iff x > 0$.

On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

g a donc pour minimum 0, atteint pour $x = 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left(\text{e}^{2u_n} - \text{e}^{u_n}\right) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ puisque le minimum de g est 0.

On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

— **Initialisation :** $u_0 = a \leqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, donc $u_n \leqslant 0$.
On a : $u_{n+1} = \text{e}^{2u_n} - \text{e}^{u_n} = \text{e}^{u_n}\left(\text{e}^{u_n} - 1\right)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 0$ donc $\text{e}^{u_n} \leqslant 1$ d'où $\text{e}^{u_n} - 1 \leqslant 0$.
Comme $\text{e}^{u_n} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} \leqslant 0$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 0, donc convergente vers un réel $\ell \leqslant 0$.

c) On suppose que $a = 0$. Le premier terme de la suite vaut 0. La suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0 et la suite **converge vers 0**.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Comme $u_n \geqslant a > 0$, tous les termes de la suite sont positifs. D'après les variations de g sur $[0 ; = \infty[$, on a $g(u_n) \geqslant g(a)$ donc $\boxed{u_{n+1} — u_n \geqslant g(a)}$.

b) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, $a+n\times g(a) = a+0\times g(a) = a$; or $u_n \geqslant a$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. La propriété est initialisée.

— **Hérédité** : on suppose que, pour un entier n quelconque, $u_n \geqslant a+n\times g(a)$.
Alors : $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right) \iff u_{n+1} = u_n + g\left(u_n\right)$
$\geqslant \left(a+n\times g(a)\right) + g\left(u_n\right)$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
Or $u_n \geqslant a > 0$ donc $g\left(u_n\right) \geqslant g(a)$ puisque la fonction g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Par conséquent $\geqslant \left(a+n\times g(a)\right) + g\left(u_n\right) \geqslant a+n\times g(a)+g(a)$
$= a+(n+1)g(a)$.
La propriété est donc **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} \geqslant a+n\times g(a)}$.

c) $a > 0$ donc $g(a) > g(0) = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+n\times g(a)\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{+\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

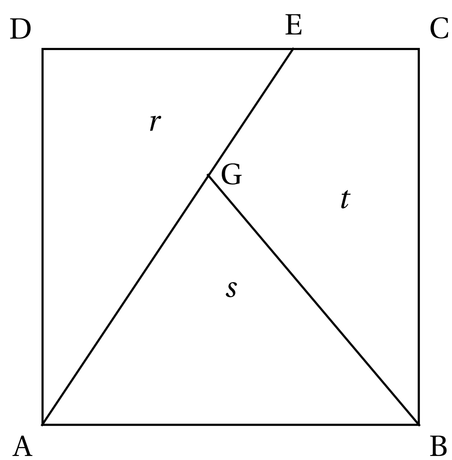
4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
D'après la question précédente, la suite $\left(u_n\right)$ tend vers $+\infty$.

a) La partie à compléter de l'algorithme est :
Tant que $u \leqslant M$
u prend la valeur $\mathrm{e}^u\left(\mathrm{e}^u - 1\right)$
n prend la valeur $n+1$
Fin Tant que

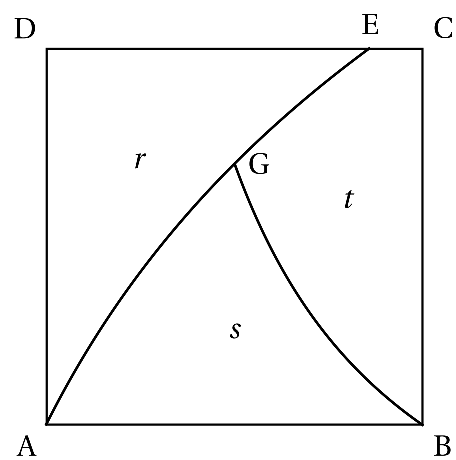
b) Pour $M = 60$, on trouve $\boxed{n = 36}$

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,,\,\overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

L'aire du triangle ADE est $\mathscr{A}(ADE) = \dfrac{\text{AD} \times \text{DE}}{2} = \dfrac{1 \times \text{DE}}{2}$. Comme cette aire vaut $\dfrac{1}{3}$, on obtient DE $+ \dfrac{2}{3}$.

Le point E a pour coordonnées : $\boxed{\text{E}\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)}$.

Appelons H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle AGB.
L'aire du triangle AGB vaut : $\mathscr{A}(AGB) = \dfrac{AB \times GH}{2} = \dfrac{GH}{2}$. Comme cette aire vaut $\dfrac{1}{3}$, on obtient $GH = \dfrac{2}{3}$.
>l'ordonne de G vaut $y_G = \dfrac{2}{3}$.
L'équation de la droite (AE) est $y = \dfrac{3}{2}x$ puisque la droite passe par l'origine et que, pour $x = x_E = \dfrac{2}{3}$, on trouve $y = y_\text{E} = 1$.
L'abscisse de G x_G vérifie donc $\dfrac{3}{2}x_\text{G} = \dfrac{2}{3}$ donc $x_\text{G} = \dfrac{4}{9}$ Le point G a donc pour coordonnées : $\boxed{\text{G}\left(\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)}$

Partie B : étude de la proposition B

1. **a)** $f\left(x_{\mathrm{E}}\right) = 1 \iff \ln\left(2x_{\mathrm{E}} + 1\right) = 1 \iff 2x_{\mathrm{E}} + 1 = \mathrm{e} \iff x_{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}$.

   b) G appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ donc $y_{\mathrm{G}} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \times \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln 2$.

   On doit alors avoir $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$, c'est-à-dire $k \times \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln 2 \iff$

   $k = \ln 2$ donc $f(x) = \ln 2\left(\dfrac{1 - x}{x}\right)$

2. **a)** Soit $F : x \mapsto F(x) = (x + 0,5) \times \ln(2x + 1) - x$ pour $x \geqslant 0$.

   $F'(x) = 1 \times \ln(2x + 1) + (x + 0,5) \times \dfrac{2}{2x + 1} - 1 = \ln(2x + 1) + \dfrac{2x + 1}{2x + 1} - 1$

   $= \ln(2x + 1) + 1 - 1 = \boxed{\ln(2x + 1) = f(x)}$.

   F est bien une primitive de f.

   b) r est l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives de la fonction $x \mapsto 1$, de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}$.

   Ainsi : $r = \displaystyle\int_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} (1 - f(x))\, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} - \int_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} - \left[F\left(\dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}\right) - F(0)\right]$.

   $F\left(\dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{e}}{2} \times \ln \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} = \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1}$

   $F(0) = 0$

   On en déduit : $r = \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1}$

3. $g(x) = \ln 2\left(\dfrac{1 - x}{x}\right) = \ln 2\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ donc une primitive G de g est définie par $\boxed{G(x) = \ln 2(\ln x - x)}$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$.

   $\boxed{r \approx 0,359}$ et $\boxed{s \approx 0,327}$. On en déduit $t = 1 - (r + s) \approx \boxed{0,314}$.

   La proposition B vérifie donc les conditions impoées par le fabriquant.

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A : généralités

1. Soit $(x\,;\; y\,;\; z)$ un TP et soit p un entier naturel non nul.

   On a donc $x^2 + y\hat{I}2 = z^2$. Alors $(px)^2 + (py)^2 = p^2x^2 + p^2y^2 = p^2\left(x^2 + y^2\right)$ $= p^2z^2 = (pz)^2$ donc $(px\,;\; py\,;\; pz)$ est aussi un TP.

2. On suppose que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un TP donc $x^2+y^2=z^2$.
   Supposons les trois entiers impairs. Alors $x\equiv 1\ [2]$, $y\equiv 1\ [2]$ et $z\equiv 1\ [2]$.
   On a $x^2\equiv 1\ [2]$, $y^2\equiv 1\ [2]$ et $z^2\equiv 1\ [2]$, d'où $x^2+y^2\equiv 0\ [2]$ donc on n'aurait pas $x^2+y^2=z^2$.
   Les trois entiers ne peuvent pas être tous impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n=2^{\alpha}\times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   a) $\boxed{192=2^6\times 3}$.
   b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x=2^{\alpha}\times k$ et $z=2^{\beta}\times m$.
   $2x^2=2\times\left(2^{\alpha}\times k\right)^2=2\times 2^{2\alpha}\times k^2=\boxed{2^{2\alpha+1}\times k^2}$
   $z^2=\left(2^{\beta}\times m\right)^2=\boxed{2^{2\beta}\times m^2}$
   c) Si $2x^2=z^2$, alors $2^{2\alpha+1}\times k^2=2^{2\beta}\times m^2$ donc $2\alpha+1=2\beta$ (unicité de la décomposition).
   C'est impossible puisque $2\alpha+1$ est impair et 2β est pair.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015=\boxed{5\times 13\times 31}$;
   On connaît le TP $(3\,;4\,;5)$ donc $(13\times 31\times 3\ ;\ 13\times 31\times 4\ ;\ 13\times 31\times 5)$ est aussi un TP, donc $(1\,209\ ;\ 1\,612\ ;\ 2\,015)$ est aussi un TP.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
   $(2n+1)^2+\left(2n^2+2n\right)^2=\left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   $2\,015=\boxed{2\times 1\,007+1}$.
   Ainsi, d'après la remarque faite ci-dessus, le triplet
   $\left(2\,015\ ;\ 2\times 1\,007^2+2\times 1\,007\ ;\ 2\times 107^2+2\times 107+1\right)=$
   $(2\,015\ ;\ 2\,030\,112\ ;\ 2\,030\,113)$ est un TP.
3. **a)** On cherche x et z entiers tels que $z^2-x^2=403^2$, c'est-à-dire
   $(z-x)(z+x)=169\times 961$.
   Résolvons le système $\left\{\begin{array}{l} z-x=169\\ z+x=961\end{array}\right.$
   En additionnant et en soustrayant, on trouve $\boxed{z=565}$ et $\boxed{x=396}$.
   b) Le triplet $(396\,;403\,;565)$ est un TP donc $(5\times 396\ ;\ 5\times 403\ ;\ 5\times 565)$ est également un TP.
   Par conséquent $(1\,980\ ;\ 2\,015\ ;\ 2\,825)$ est un TP.