

∞ Corrigé du baccalauréat S Métropole 22 juin 2015 ∞

EXERCICE 1

6 POINTS

Partie 1

1. a. Soient c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

$$\begin{aligned} \text{Par définition, } P(c \leq X \leq d) &= \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_c^d \\ &= -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c}) = \boxed{e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}. \end{aligned}$$

b. $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leq X \leq 20) = 0,95 \iff e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 20} = 0,95 \iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95 \iff e^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff \lambda = \frac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.

c. On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

d. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} = e^{-1,5} - e^{-3} \approx \boxed{0,173}$.

e. $P(X > 18) = 1 - P(0 \leq X \leq 18) = e^{-18\lambda} = e^{-2,7} \approx \boxed{0,067}$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a. $P(20 \leq Y \leq 21) \approx \boxed{0,015}$.

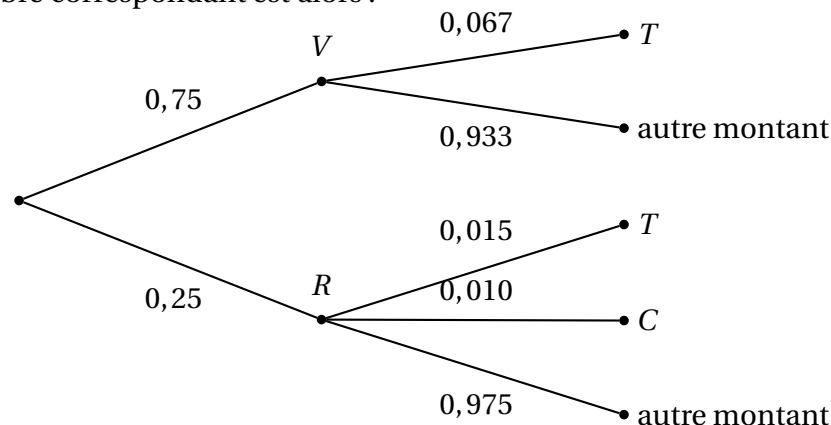
b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leq Y \leq 21) \approx \boxed{0,010}$.

Partie 2

1. Notons :

- R l'évènement « le bon d'achat est rouge ».
- V l'évènement « le bon d'achat est vert »
- T : l'évènement « avoir un un bon d'achat de trente € ».
- C : l'évènement « avoir un un bon d'achat de cent € ».
- A : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'une autre valeur ».
- S : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30 € ».

L'arbre correspondant est alors :



On a : $P_R(S) = P_R(T \cup C) = p_R(T) + P_R(C) = 0,015 + 0,010 = \boxed{0,025}$.

2. $P(S) = P(R \cap S) + P(V \cap S) = 0,75 \times 0,067 + 0,25 \times 0,025 = 0,0566 \approx \boxed{0,057}$.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. La probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 € est $p = 0,057$.

La fréquence observée est $f = \frac{6}{200} = \frac{3}{100} = 0,03$.

La taille de l'échantillon est $n = 200$.

On a $n = 200 \geq 30$; $np = 11,4 \geq 5$ et $n(1 - p) = 188,6 \geq 5$.

On peut donc utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{200} = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx \boxed{[0,024 ; 0,090]}.$$

$f = 0,03 \in I$. Les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95 %.

EXERCICE 2

3 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; -1 ; 5), B(2 ; -1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. a. Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

- b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan \mathcal{P} d'équation $\boxed{x = 11}$.

- c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan \mathcal{P} donc (AB) est orthogonale à \mathcal{P} .

Le point d'intersection E a des coordonnées (x ; y ; z) qui vérifient l'équation cartésienne de \mathcal{P} et la représentation paramétrique de \mathcal{P} .

$$\text{On doit avoir : } \begin{cases} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \text{ donc } \boxed{E(11 ; -1 ; 5)}.$$

- d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et

$$\text{une représentation paramétrique de (CD) est } \begin{cases} x = 11 \\ y = 0,8t' \\ z = 1 + 0,6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} t = 11 \\ -1 = 0,8t' \\ z = 1 + 0,6t' \end{cases} \text{ qui n'a pas de solutions,}$$

car on trouve t' négatif, donc $1 + 0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. a. $\overrightarrow{M_t N_t} \begin{pmatrix} 11-t \\ 0,8t+1 \\ 0,6t-4 \end{pmatrix}$ donc $M_t N_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2$
 $= 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16 =$
 $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
- b. $M_t N_t$ est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.
 On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2 - 25,2t + 138$; f est une fonction du second degré; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \frac{25,2}{4} = 6,3$.
 La distance est **minimale** pour $t = 6,3$ s

EXERCICE 3

5 POINTS

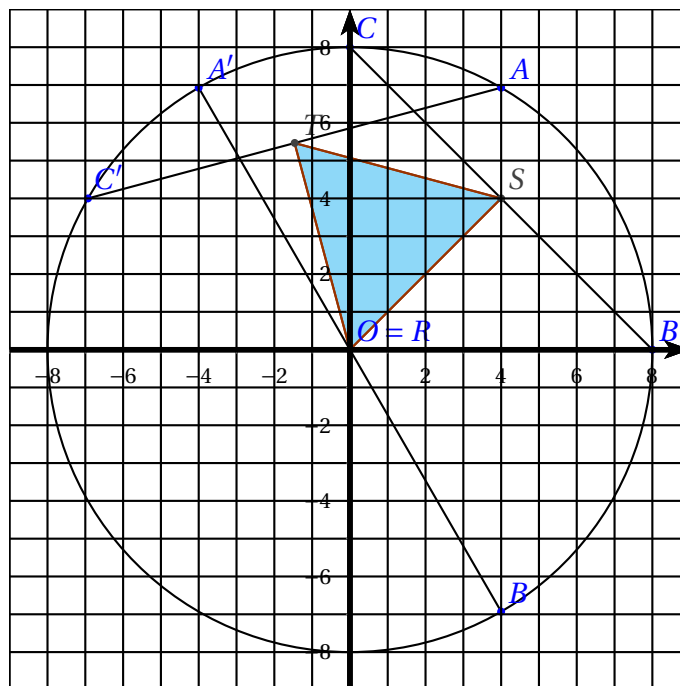
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$.
 $\Delta = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
 L'équation a deux solutions complexes conjuguées :
 $z_1 = \frac{8 + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = 4 + 4\sqrt{3}i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = 4 - 4i\sqrt{3}$.
 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$. (figure à la fin de l'exercice)
- a. $|a| = |4 + 4i\sqrt{3}| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4 \times 2 = 8$.
 On en déduit $a = 8 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$. Un argument de a est donc $\frac{\pi}{3}$.
- b. On a trouvé $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \bar{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- c. $|a| = 8$; $|b| = |\bar{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre 0 et de rayon 8.
- d. Voir figure en fin d'exercice.
3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
- a. $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8$.
- b. $|a'| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| \times |e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a| = 8$ car $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout θ réel.
 $\arg(a') = \arg(ae^{i\frac{\pi}{3}}) = \arg(a) + \arg(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
- Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.
4. a. On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A'B], [B'C] et [C'A].
 On a : $r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 0$.
 $s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$.
 On a admis que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.

b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS = |s - r| = |4 + 4i| = 4|1 + i| = \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $ST = |t - s| = |-2 - 2\sqrt{3} + i(-2 + 2\sqrt{3})| = 2|-1 - \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})|$
 $= 2\sqrt{(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3)} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $RT = |t - r| = |2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})|$
 $= 2|1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})| = 2\sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{8}$
 $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.



EXERCICE 3

5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans \mathbb{Z} : $7x - 5y = 1$.

a. $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc $(3; 4)$ est solution de (E).

- b.
- Le couple $(x; y)$ est solution de (E) donc : $7 \times x - 5 \times y = 1$
 Le couple $(3; 4)$ est solution de (E) donc : $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$
 Par soustraction membre à membre : $7(x-3) - 5(y-4) = 0$
 donc $7(x-3) = 5(y-4)$.
 - Réciproquement, si le couple $(x; y)$ est tel que $7(x-3) = 5(y-4)$,
 on peut dire que $7(x-3) - 5(y-4) = 0 \iff 7x - 21 - 5y + 20 = 0$
 $0 \iff 7x - 5y = 1$, et donc que le couple $(x; y)$ est solution de (E).

- Donc le couple d'entiers $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.
 - c. • Soit $(x; y)$ un couple d'entiers solution de (E), ce qui équivaut à $7(x - 3) = 5(y - 4)$.
 $7(x - 3) = 5(y - 4)$ entraîne que 7 divise $5(y - 4)$; or 7 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y - 4$. Donc il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 7k$ ce qui équivaut à $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 Comme $7(x - 3) = 5(y - 4)$ et $y - 4 = 7k$, cela implique que $7(x - 3) = 5 \times 7k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 5k$ ou encore $x = 5k + 3$.
 Donc si $(x; y)$ est solution de (E), alors $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$
 - Réciproquement, si le couple d'entiers $(x; y)$ est tel que $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $7x - 5y = 7(5k + 3) - 5(7k + 4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$ donc $(x; y)$ est solution de (E).
 - Donc les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$
2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. On sait que $7x - 5y = 1$.
 D'après la question 1, on peut dire que $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec k entier relatif. Le nombre de jetons est un nombre positif, et ne doit pas dépasser 25 qui est le nombre total de jetons dans la boîte.
 Pour $k = 0$, $x = 3$ et $y = 4$; il peut donc y avoir 3 jetons rouges, 4 jetons verts et $25 - 3 - 4 = 18$ jetons blancs.
 Pour $k = 1$, $x = 8$ et $y = 11$; il peut donc y avoir 8 jetons rouges, 11 jetons verts et $25 - 8 - 11 = 6$ jetons blancs.
 Les autres valeurs de k ne donnent pas de résultats répondant au problème.

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. Comme au départ c'est-à-dire pour $n = 0$, le pion est en A, on peut dire que $X_0 = (1 \ 0 \ 0)$.
 D'après le texte, on tire au hasard un pion dans la boîte, donc il y a équiprobabilité. Il y a 3 pions rouges sur 25 donc la probabilité de tirer un pion rouge est $\frac{3}{25} = 0,12$. On calcule de même la probabilité de tirer un pion vert : $\frac{4}{25} = 0,16$ et la probabilité de tirer un pion blanc : $\frac{18}{25} = 0,72$.
 On cherche la probabilité a_{n+1} qu'à l'étape $n + 1$ le pion soit en A.
 S'il était en A à l'étape n , il faut tirer une boule blanche pour qu'il y reste, ce qui se fait avec une probabilité de 0,72. Comme il avait une probabilité égale à a_n d'être en A à l'étape n , on retient $0,72a_n$.
 S'il était en B à l'étape n , il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à b_n d'être en B à l'étape n , on retient $0,12b_n$.

S'il était en C à l'étape n , il faut tirer une boule rouge pour qu'il passe en A, ce qui se fait avec une probabilité de 0,12. Comme il avait une probabilité égale à c_n d'être en C à l'étape n , on retient $0,12c_n$.

On peut donc dire que : $a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n$.

On justifie de la même façon b_{n+1} et c_{n+1} et l'on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,72a_n + 0,12b_n + 0,12c_n \\ b_{n+1} = 0,12a_n + 0,72b_n + 0,16c_n \\ c_{n+1} = 0,16a_n + 0,16b_n + 0,72c_n \end{cases}$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$(a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad c_{n+1}) = (a_n \quad b_n \quad c_n) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } X_{n+1} = X_n T \text{ où } T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ On admet que } T = PDP^{-1} \text{ où } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$$

a. On sait que $P = (P^{-1})^{-1}$; on cherche donc à la calculatrice l'inverse

$$\text{de la matrice } P^{-1} \text{ et on trouve : } P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

b. On va démontrer par récurrence sur n ($n \geq 1$) la propriété \mathcal{P}_n :

$$T^n = PD^n P^{-1}.$$

- *Initialisation* : on sait que $T = PDP^{-1}$ donc $T = PD^1 P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie pour un naturel quelconque ($p \geq 1$), c'est-à-dire $T^p = PD^p P^{-1}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

On veut démontrer que la propriété est vraie au rang $p + 1$.

$T^{p+1} = T^p \times T$; d'après l'hypothèse de récurrence, $T^p = PD^p P^{-1}$ et on sait que $T = PDP^{-1}$. Donc $T^{p+1} = PD^p P^{-1} \times PDP^{-1} = PD^p P^{-1} PDP^{-1} = PD^{p+1} P^{-1}$ et donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = PD^n P^{-1}$.

$$c. \text{ La matrice } D \text{ est une matrice diagonale ; } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$$

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ; ainsi

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n , $X_n = X_0 T^n$.

a. $X_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ et $X_0 = (1 \ 0 \ 0)$

$$X_n = X_0 T^n \iff (a_n \ b_n \ c_n) = (1 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\iff (a_n \ b_n \ c_n) = (\alpha_n \ \beta_n \ \gamma_n)$$

Donc $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$. Or comme à chaque étape, le pion est soit en A, soit en B, soit en C, $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

b. $a_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$; or $-1 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$ d'où l'on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{10}$.

$$b_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}; \text{ or } -1 < 0,56 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,56^n =$$

$$0 \text{ et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0, \text{ on peut en déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{37}{110}.$$

$$c_n = 1 - a_n - b_n \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 - \frac{3}{10} - \frac{37}{110} = \frac{4}{11}.$$

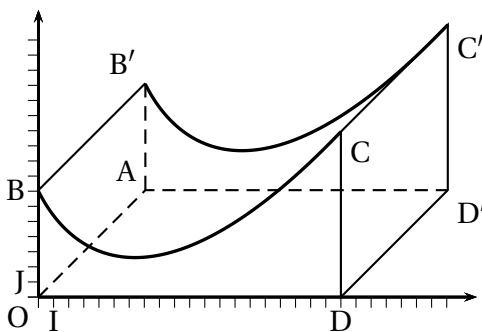
c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{10} = \frac{33}{110}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{37}{110}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{4}{11} = \frac{40}{110}$

Le sommet sur lequel on a le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations est le sommet qui a la plus grande probabilité au rang n ; c'est donc le sommet C.

EXERCICE 4

6 POINTS

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie 1

1. $f = u \ln(u) + v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = -2x + 7$.

f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$f' = u' \ln(u) + u \times \frac{u'}{u} + v' \text{ avec } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = -3 \text{ d'où } f'(x) = 1 \times \ln(x + 1) + (x + 1) \frac{1}{x + 1} - 3 = \ln(x + 1) + 1 - 3 \text{ donc } \boxed{f'(x) = \ln(x + 1) - 2}.$$

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x + 1) = 2 \iff x + 1 = e^2 \iff x = e^2 - 1$.

$f'(x) > 0 \iff \ln(x + 1) > 2 \iff x + 1 > e^2$ (croissance de la fonction exp) d'où $x > e^2 - 1$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	-	\emptyset	+
$f(x)$	7	$f(e^2 - 1) \approx 2,6$	$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = 1 \ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g'(x) = (x + 1) \ln(x + 1).$$

g est donc une primitive de $x \mapsto (x + 1) \ln(x + 1)$.

Une primitive de $x \mapsto 3x - 7$ est $x \mapsto \frac{3x^2}{2} + 7x$.

une primitive de f est donc définie par :

$$F(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{2} + 7x =$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13}{2}x}.$$

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f(e^2 - 1) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie** ;

P_2 : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^{20} f(x) \, dx = F(20) - F(0).$$

$$F(21) = \frac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570.$$

$$F(0) = 0.$$

On en déduit $\mathcal{A}_1 = \frac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101,3$.

L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(OAB'B) = 10f(0) = 70$.

L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(DD'C'C) = 10f(20) \approx 109,3$.

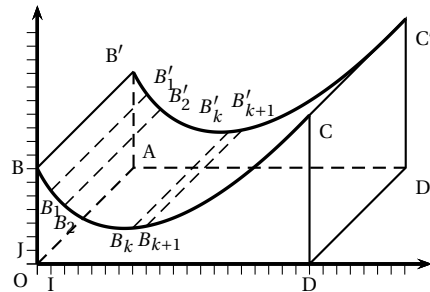
L'aire à peindre en rouge est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \approx 381,9 \, \text{m}^2$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\frac{381,9}{5} \approx 77$.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.



a. $B_k B_{k+1} = \sqrt{1^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$

Afficher S