∽ Corrigé du baccalauréat S de Centres étrangers ∾ 13 juin 2017

Exercice I — 5 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

On sait que $P(X \leqslant 70) = 0,02$; par symétrie par rapport à l'espérance $\mu = 175$, on en déduit que $P(X \geqslant 180) = 0,02$.
Alors $P(170 \leqslant X \leqslant 180) = 1 - 2 \times 0,02 = 0,96$: $\boxed{P(170 \leqslant X \leqslant 180) = 0,96}$ (réponse b.)

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Notons N la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés. On a répétition de 50 expériences aléatoires, identiques et indépendantes à deux issues.
N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 50\ ;\ p = 0,05)$.
$P(N \geqslant 2) = 1 - p(X \leqslant 1)$.
On calcule $P(N \leqslant 1)$ avec la fonction de répartition de la loi binomiale de la calculatrice.
On trouve $\boxed{P(N \geqslant 2) \approx 0,72}$ (réponse a.)

Autre méthode : on sait que $P(N = k) = \binom{50}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ donc :

$$P(N \geqslant 2) = 1 - \left[\binom{50}{0} 0.05^0 (1-0,05)^{50-0} + \binom{50}{1} 0,05^1 (1-0,05)^{50-1}\right] = 1 - \left[0,95^{50} + 50 \times 0,05 \times 0,95^{49}\right]$$

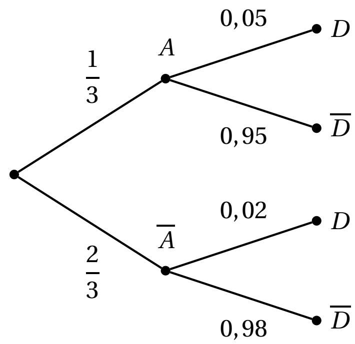
$\boxed{\approx 0,72}$.

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.

Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Visualisons la situation par un arbre pondéré :



Alors : $P_D\left(\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(D \cap \overline{A}\right)}{P(D)} = \dfrac{P_{\overline{A}}(D) \times p\left(\overline{A}\right)}{P(D)} = \dfrac{P_{\overline{A}}(D) \times p\left(\overline{A}\right)}{P_A(D) \times p(A) + P_{\overline{A}}(D) \times p\left(\overline{A}\right)} =$ $\dfrac{0,02 \times \frac{2}{3}}{0,05 \times \frac{1}{3} + 0,02 \times \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{4}{300}}{\frac{9}{300}} = \dfrac{4}{9} \approx 0,44$: $\boxed{P_D\left(\overline{A}\right) \approx 0,44}$ (réponse c.)

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

$P(Y \leqslant 300) = \displaystyle\int_0^{300} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-200\lambda}$ où λ est le paramètre de la fonction densité liée à cette loi exponentielle.

On sait que l'espérance vaut $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = 500$ donc $\lambda = \dfrac{1}{500}$.

Par conséquent : $P(Y \leqslant 300) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}} \approx 0,45$: $\boxed{P(Y \leqslant 300) \approx 0,45}$ (réponse a.)

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à $0,05$. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

On sait que l'intervalle de confiance au niveau 0,95 est $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ qui a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

L'entreprise veut donc que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \geqslant 0,05$: on obtient $\sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0,05} = 40$ donc il faut que $\boxed{n \geqslant 1\,600}$ (réponse c ;)

Exercice II **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 3-t\\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{e†} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+2t'\\ y &=& -1+t'\\ z &=& 5 \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Pour $t = 0$ dans la représentation paramétrique de d_1, on obtient $x = 2$; $y = 3$ et $z = 0$ donc **A(2 ; 3 ; 0) appartient à $\mathbf{d_1}$**.

2. On sait que dans la représentation paramétrique d'une droite, les coefficients de x, y et z donnent les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite.

On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_1 et $\boxed{\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$ est un vecteur directeur de d_2.

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles : les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc les deux droites d_1 et d_2 ne sont **pas parallèles**.

3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_1} = 1+2-3 = 0$ donc $\vec{v} \perp \overrightarrow{u_1}$.
$\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_2} = 2-2+0 = 0$ donc $\vec{v} \perp \overrightarrow{u_2}$.
$\vec{v}$ est bien orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_1} = 1\times5+(-1)\times4+1\times(-1) = 5-4-1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{u_1}$.
$\vec{n}\cdot\vec{v} = 1\times1+(-1)\times(-2)+1\times(-3) = 1+2-3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \vec{v}$.
$\vec{n}$ est **orthogonal à deux vecteurs non colinéaires** de plan P donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à ce plan.
P passe par A donc une équation cartésienne de P est :
$5\left(x-x_A\right)+4\left(y-y_A\right)-\left(z-z_A\right) = 0 \iff 5(x-2)+4(y-3)-z = 0$
$\iff 5x+4y-z-22 = 0$: P a pour équation cartésienne $\boxed{\mathbf{5x+4y-z-22=0}}$

b. On cherche l'intersection de d_2 et de P :
on injecte les expressions de x, y et z de la représentation paramétrique de d_2 dans l'équation cartésienne de P :
On obtient : $5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22 = 0 \iff 14t'-56 = 0 \iff t' = 4$.
On remplace t' par 4 : on obtient $x = -5+2\times4 = 3$; $y = -1+4 = 3$ et $z = 5$.
d_2 et P ont un seul point commun : $\boxed{B(3\,;\,3\,;\,5)}$.

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B $(3\,;\,3\,;\,5)$.

a. Δ a pour représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x = 3+k \\ 3-2k \\ 5-3k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}}$.

b. On cherche si d_1 et Δ sont sécantes. Si c'est le cas, il existe t et k réels tels que :

$$\begin{cases} 2+t = 3+k \\ 3-t = 3-2k \\ t = 5-3k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5-3k \\ 2+5-3k = 3+k \\ 3+3k-5 = 3-2k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5-3k \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

En remplaçant k par 1 ou t par 2, on obtient que les deux droites ont un seul point d'intersection : $\boxed{C(4\,;\,1\,;\,2)}$.

c.
- D'après la question (3.) la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonale aux droites d_1 et d_2.
- D'après la question (5b.) les droites d_1 et Δ sont sécantes en un point $C(4\,;\,1\,;\,2)$.
- Par ailleurs , le point B$(3\,;\,3\,;\,3)$ appartient à la droite Δ par définition (5.) et à la droite d_2 d'après la question (4b.)
- Donc la droite Δ est sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites ce qui répond au problème posé.

Exercice III — 6 points

Commun à tous les candidats

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

On résout l'équation $f(t) = 10 \iff 20\mathrm{e}^{-0,1t} = 10 \iff \mathrm{e}^{-0,1t} = \dfrac{1}{2} \iff)0,1t = \ln\dfrac{1}{2}$

$\iff t = -\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{0,1} = \dfrac{\ln 2}{0,1} \approx \boxed{6,9}$.

La demi-vie est d'environ 6,9 h, soit 6 h 54 min.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
On résout alors l'inéquation $f(t) \leqslant 0,2 \iff 20\text{e}^{-0,1t} \leqslant 0,2 \iff \text{e}^{-0,1t} \leqslant 0,01$
$\iff -0,1t \leqslant \ln 0,01 \iff t \geqslant -\dfrac{\ln 0,01}{0,1}\boxed{\approx 46,1}$.
Le médicament est éliminé au bout de 46,1 h (soit 46 h 6 min).

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.
$\displaystyle\int_0^x f(() \,\text{d}t = \int_0^x 20\text{e}^{-0,1t}\,\text{d}t = 20\left[-10\text{e}^{-0,1}t\right]_0^x = 200\left(1-\text{e}^{-0,1x}\right)$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(200\left(1-\text{e}^{-0,1x}\right)\right) = 200$ car $\displaystyle\lim_{x\to=\infty}\text{e}^{-0,1x} = 0$ donc $\boxed{\text{l'ASC est égale 200}}$.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\mu$g.L^{-1}.

1. On a : $g(t) = 20\left(\text{e}^{-0,1t} - \text{e}^{-t}\right)$.
On dérive : $g'(t) = 20 \times \left[-0,1\text{e}^{-0,1t} - (-1)\text{e}^{-t}\right] = 20\left[-0,1\text{e}^{-0,1t} + \text{e}^{-t}\right] =$
$\boxed{20\text{e}^{-t}\left[1-0,1\text{e}^{0,9t}\right]}$

2. On étudie le signe de g' :
Quel que soit le réel t, $20\text{e}^{-0,1t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $1-0,1\text{e}^{0,9t}$.

- $1-0,1\text{e}^{0,9t} = 0 \iff 1 = 0,1\text{e}^{0,9t} \iff \text{e}^{0,9t} = \dfrac{1}{0,1} = 10 \iff 0,9t = \ln 10 \iff t = \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$.
- $1-0,1\text{e}^{0,9t} > 0 \iff 1 > 0,1\text{e}^{0,9t} \iff \text{e}^{0,9t} < \dfrac{1}{0,1} = 10 \iff 0,9t < \ln 10 \iff t > \dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$.
- $g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$

On en déduit le tableau de variation

x	0		$\dfrac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\dfrac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$	$\searrow$	

La durée après laquelle la concentration est maximale est $\dfrac{\ln 10}{0,9}$ h, soit environ 2,56 h.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est

choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
   - **Initialisation** : Pour $n = 1$, $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 40 \times 0,5 = 40 - 20 = 20 = u_1$ donc la propriété est **vraie au rang** $n = 1$.
   - **Hérédité** : on suppose que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ pour une valeur de n quelconque.
     Alors $u_{n+1} = 0,5u_n + 20 = 0,5 \times \left[40 - 40 \times 0,5^n\right] + 20 = 20 - 40 \times 0,5 \times 0,5^n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}$ c.q.f.d.
     La propriété est **héréditaire**.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
2. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 40}$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L-$^{-1}$.
   On cherche l'entier n minimum tel que $u_n \geqslant 38$.
   $u_n \geqslant 38 \iff 40 - 40 \times 0,5^n \geqslant 38 \iff -40 \times 0,5^n \geqslant -2 \iff 0,5^n \leqslant 0,05 \iff n\ln(0,5) \leqslant \ln(0,05)$ (en appliquant la fonction $\|n$, croissante sur $]0~;~+\infty[$).
   On obtient : $n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,5)} \approx 4,3$ (en divisant par $\ln 0,5$ qui est négatif).
   Il faut donc au **minimum 5 injections**.

Exercice IV 5 points

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = \text{OA}_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$
On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1. Pour $n = 6$, l'angle $\left(\overrightarrow{OA_6}~;~\overrightarrow{OB_6}\right) = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle OA_6B_6 est isocèle et a un angle principal de $\dfrac{\pi}{3}$: il est **équilatéral**.

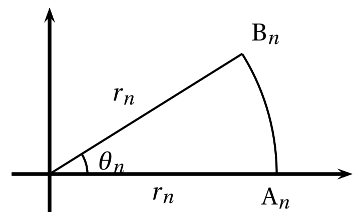
   Son aire vaut $\dfrac{1}{6}$ car le polygone est formé de six triangles identiques et son aire vaut 1.
2. $OA_6 = 0B_6 = r_6$; la hauteur h_6 du triangle OA_6B_6 vaut $\boxed{r_6 \sin\dfrac{\pi}{3} = r_6\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

3. L'aire du triangle vaut $\mathcal{A}_6 = \dfrac{r_6 \times h_6}{2} = \dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{r_6^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{6}$.

On en déduit : $r_6^2 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ d'où $\boxed{r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}}$

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n :\geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. La hauteur h_n du triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ est $h_n = OB_n \sin\theta_n = \boxed{r_n \sin\theta_n}$.

   L'aire de ce triangle est alors : $\mathcal{A}_n = \dfrac{r_n \times h_n}{2} = \dfrac{r_n^2 \sin\theta_n}{2} = \boxed{\dfrac{r_n^2}{2}\sin\theta_n}$.
2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.

   Puisque l'on a n triangles identiques superposables, on a $n\theta_n = 2\pi$ donc $\boxed{\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}}$

   L'aire de chaque triangle vaut $\dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{r_n^2}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$ d'où $r_n^2 = \dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ et

   donc $\boxed{r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}}$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,\pi[$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour n 4, s'exprime à l'aide de la fonction f par : $\boxed{r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}$ (facile à montrer!)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

1. Pour tout $n \geqslant 4$, $0 < 2 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < 0 < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.
   Comme la fonction f est croissante, on en déduit :
   $0 < f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
   $\Rightarrow 0 < \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi} f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)} \Rightarrow \boxed{0 < r_{n+1} < r_n}$.
   La suite (r_n) est bien **décroissante**.
2. La suite (r_n) est décroissante et minorée par 0, donc **convergente** vers un réel $L \geqslant 0$.
3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

À la calculatrice, on obtient :

- $r_{10} \approx 0,5833 > 0,58$
- $r_{11} \approx 0,5799 < 0,58$

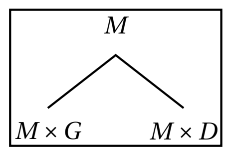
L'algorithme va donc afficher $\boxed{n = 11}$.

Exercice IV (spécialité) 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.
Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. • $A = G \times D = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

• $B = D \times G = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

On peut alors compléter les deux matrices manquantes dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern- Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant :
$b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$. Le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice :
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
La fraction associée est $\dfrac{2+1}{3+2} = \dfrac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.
On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. $d(a+c) - c(b+d) = ad + cd - bc - cd = ad - bc$ donc, si $ad - bc = 1$, $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

b. On suppose que $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M = ad - bc = 1$.
Alors $M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 110 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & D \\ b+d & d \end{pmatrix}$.
Alors : $\Delta_{M\times G} = d(a+c) - c(b+d) = 1$ d'après la question précédente.
On admet de même que $\Delta_{M\times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4. Soit N une matrice de l'arbre de Stern-Brocot. On a : $\Delta_N = d(a+c) + (-c)(b+d) = 1$.
D'après le théorème de Bézout, les entiers $(a+c)$ et $(b+d)$ sont premiers entre eux ; la fraction associée $\dfrac{a+c}{b+d}$ est donc irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant, que l'on complète

VARIABLES :	m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
TRAITEMENT :	Tant que $m \neq n$, faire
	Si $m < n$
	Afficher « Gauche »
	n prend la valeur $n - m$
	Sinon
	Afficher « Droite »
	m prend la valeur $m - n$

a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

b. On peut émettre la conjecture suivante : « L'algorithme fournit le chemin à suivre à partir de la matrice unité pour obtenir une fraction $\dfrac{m}{n}$ donnée ».
Par exemple, pour obtenir la fraction associée $\dfrac{4}{7}$, il faut suivre le chemin : « Gauche-Droite-Gauche-Gauche »
Vérification : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; la matrice associée est bien $\boxed{\dfrac{3}{7}}$