Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 2 décembre 2020

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On considère l'équation $(E) : z^3 = 4z^2 - 8z + 8$ ayant pour inconnue le nombre complexe z.
   a. $(z-2)\left(z^2-2z+4\right) = z^3 - 2z^2 + 4z - 2z^2 + 4z - 8 = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$
   b. $(E) \iff z^3-4z^2+8z-8=0 \iff (z-2)\left(z^2-2z+4\right)=0 \iff z-2=0$ ou $z^2-2z+4=0$
   - $z-2=0 \iff z=2$
   - On résout $z^2-2z+4=0$; $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 4 = -12 = -\left(2\sqrt{3}\right)^2$
     L'équation admet deux solutions conjuguées :
     $z_1 = \dfrac{2+\mathrm{i}\times 2\sqrt{3}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

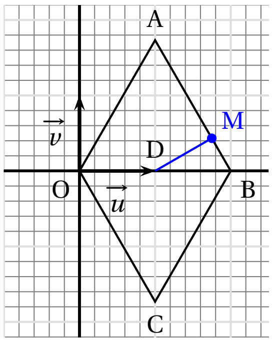
   L'ensemble solution de l'équation (E) est : $\left\{2\ ;\ 1+\mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

   c. On écrit les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle :
   - $2 = 2\,\mathrm{e}^0$
   - $1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
   - $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ est le conjugué de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ donc $1-\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit A, B, C et D les quatre points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \quad z_{\mathrm{B}} = 2 \quad z_{\mathrm{C}} = 1-\mathrm{i}\sqrt{3} \quad z_{\mathrm{D}} = 1.$$

Ces quatre points sont représentés dans la figure ci-contre.



2.
   - Le milieu de [OB] a pour affixe $\dfrac{z_{\mathrm{O}}+z_{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 = z_{\mathrm{D}}$.
     Le milieu de [AC] a pour affixe $\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{C}}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 = z_{\mathrm{D}}$.
   - Les segments [OB] et [AC] ont le même milieu D donc OABC est un parallélogramme.
   - $\mathrm{OA} = |z_{\mathrm{A}}| = \left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \left|2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 2$
   - $\mathrm{OC} = |z_{\mathrm{C}}| = \left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \left|2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 2$

   Le parallélogramme OABC a deux côtés consécutifs de même longueur donc OABC est un losange.

3. Soit M le point d'affixe $z_{\mathrm{M}} = \dfrac{7}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   a. Pour démontrer que les points A, M et B sont alignés, on va utiliser les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$:

- $\overrightarrow{\text{AM}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\text{AM}}} = \dfrac{7}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \text{i}\sqrt{3} = \dfrac{3}{4} - \text{i}\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.
- $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\text{AB}}} = 2 - 1 - \text{i}\sqrt{3} = 1 - \text{i}\sqrt{3}$.
- $\overrightarrow{\text{AM}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires donc les points A, M et B sont alignés.

b.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour affixe $1 - \text{i}\sqrt{3}$ donc il a pour coordonnées $\left(1\ ;\ -\sqrt{3}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{DM}}$ a pour affixe $\dfrac{7}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1 = \dfrac{3}{4} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ donc il a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
- $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{DM}} = 1 \times \dfrac{3}{4} + \left(-\sqrt{3}\right) \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{\text{AB}} \perp \overrightarrow{\text{DM}}$.

On en déduit que le triangle DMB est rectangle en M.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le phaéton à bec rouge est un oiseau des régions intertropicales.

1. Lorsque le phaéton à bec rouge vit dans un environnement pollué, sa durée de vie, en année, est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 0,95$.

a. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \dfrac{X - \mu}{0,95}$.
D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire Y suit la loi normale centrée réduite.

b. On sait que $P(X \geqslant 4) = 0,146$ donc $P(X \leqslant 4) = 1 - 0,146 = 0,854$..
$X \leqslant 4 \iff X - \mu \leqslant 4 - \mu \iff \dfrac{X-\mu}{0,95} \leqslant \dfrac{4-\mu}{0,95} \iff Y \leqslant \dfrac{4-\mu}{0,95}$
Donc $P(X \leqslant 4) = 0,854$ équivaut à $P\left(Y \leqslant \dfrac{4-\mu}{0,95}\right) = 0,854$.
On sait que Y suit la loi normale centrée réduite, donc on peut déterminer à la calculatrice le nombre a tel que $P(Y \leqslant a) = 0,854$; on trouve $a \approx 1,0537$.
Donc μ vérifie $\dfrac{4-\mu}{0,95} \approx 1,0537$, c'est-à-dire $\mu \approx 4 - 0,95 \times 1,0537$ ce qui donne $\mu \approx 3$.

2. Lorsque le phaéton à bec rouge vit dans un environnement sain, sa durée de vie, en année, est modélisée par une variable aléatoire Z.
Les courbes des fonctions de densité associées aux lois de X et de Z sont représentées sur l'**ANNEXE à rendre avec la copie**.

a. La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 3$; donc la courbe de la fonction de densité associée à X est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 3$. C'est donc la courbe $\mathscr{C}_2$.

b. Sur l'ANNEXE, on hachure la zone du plan correspondant à $P(Z \geqslant 4)$.
On admettra par la suite que $P(Z \geqslant 4) = 0,677$.

3. Une étude statistique portant sur une région donnée, a permis d'établir que 30 % des phaétons à bec rouge vivent dans un environnement pollué; les autres vivent dans un environnement sain. On choisit au hasard un phaéton à bec rouge vivant dans la région donnée.
On considère les évènements suivants :

- S : « le phaéton à bec rouge choisi vit dans un environnement sain »;
- V : « le phaéton à bec rouge choisi a une durée de vie d'au moins 4 ans ».

a. On complète l'arbre pondéré illustrant la situation sur l'ANNEXE.

b. D'après la formule des probabilités totales :
$P(V) = P(S \cap V) + P\left(\overline{S} \cap V\right) = 0,7 \times 0,677 + 0,3 \times 0,146 = 0{,}5177 \approx 0,518$

c. Sachant que le phaéton à bec rouge a une durée de vie d'au moins 4 ans la probabilité qu'il vive dans un environnement sain est : $P_V(S) = \dfrac{P(V \cap S)}{P(V)} = \dfrac{0,7 \times 0,677}{0{,}5177} \approx 0,915$

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$, par $g(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1++\mathrm{e}^x)^2}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en $+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = 0$
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- Limite en $-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = 4$
Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et que $g'(0) = 0$.

- Pour $x < 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) < g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x < 0$, on a $g'(x) < 0$.
- Pour $x > 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) > g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$.

3. La fonction g' s'annule et change de signe pour $x = 0$; elle passe de négative à positive, donc la fonction g admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{(1+1)^2} = \dfrac{5}{4}$.

On dresse le tableau des variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = 3 - \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

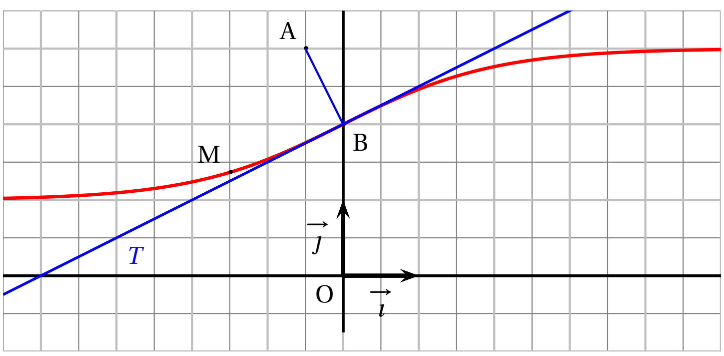
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

1. $f(0) = 3 - \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^0} = 3 - \dfrac{2}{2} = 2$ donc le point B$(0\,;\,2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Soit x un réel quelconque.
   On note M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$.
   $$\mathrm{AM}^2 = (x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A})^2 + \left(y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}\right)^2 = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(f(x) - 3\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{2}{1+\mathrm{e}^x} - 3\right)^2$$
   $$= x^2 + x + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = g(x)$$
3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.
   $\mathrm{AM}^2 = g(x)$ et $g(x)$ est minimale pour $x = 0$; AM est minimale pour $x = 0$ donc si M a pour abscisse 0, c'est-à-dire est en B.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Pour tout réel x, $f'(x) = 0 - \dfrac{0 - 2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

   b. Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.
   L'équation réduite de T est : $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$.
   - $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ donc $f'(0) = \dfrac{2\times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{2}$
   - $f(0) = y_\mathrm{B} = 2$

   Donc l'équation réduite de T est $y = \dfrac{x}{2} + 2$.
5. La droite T a pour équation $y = \dfrac{x}{2} + 2$ soit $\dfrac{x}{2} - y + 2 = 0$; elle a donc pour vecteur normal $\vec{n}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\left(0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\,;\,2 - 3\right)$ soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$; il est donc normal à la droite T.
   On en déduit que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).



Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **Affirmation 1** : L'équation $(3\ln x-5)\left(\mathrm{e}^{x}+4\right)=0$ admet exactement deux solutions réelles.

   $(3\ln x-5)\left(\mathrm{e}^{x}+4\right)=0 \iff 3\ln x-5=0$ ou $\mathrm{e}^{x}+4=0$

   - $3\ln x-5=0 \iff \ln x=\dfrac{5}{3} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}$; une solution réelle.
   - $\mathrm{e}^{x}+4=0$ n'a pas de solution réelle car $\mathrm{e}^{x}>0 \Rightarrow \mathrm{e}^{x}>4>0$ pour tout x.

   L'équation n'a donc qu'une solution réelle.

   Affirmation 1 fausse

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout n, $u_{n+1}=2u_n-5n+6$.

   Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $u_n=3\times 2^n+5n-1$.

   En calculant quelques termes de la suite, 2, 10, 21, 38, 67,120, on peut conjecturer que la propriété $u_n=3\times 2^n+5n-1$ est vraie, pour tout n.
   On va démontrer cette propriété par récurrence.

   - **Initialisation**
     Pour $n=0$, on a $u_0=2$ et $3\times 2^n+5n-1=3\times 1+0-1=2$.
     Donc la propriété est vraie pour $n=0$.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété vraie au rang $n\geqslant 0$; c'est-à-dire : $u_n=3\times 2^n+5n-1$.
     On veut démontrer que $u_{n+1}=3\times 2^{n+1}+5(n+1)-1$.
     $u_{n+1}=2u_n-5n+6=2\left(3\times 2^n+5n-1\right)-5n+6=3\times 2^{n+1}+10n-2-5n+6$
     $=3\times 2^{n+1}+5n+4=3\times 2^{n+1}+5(n+1)-1$
     Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

   Affirmation 2 vraie

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n=n^2+\dfrac{1}{2}$.

   Affirmation 3 : La suite (u_n) est géométrique.

   On calcule quelques termes de la suite (u_n).
   $u_0=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $u_1=1^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$; $u_2=2^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$; $u_3=3^2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{2}$

   $\dfrac{u_3}{u_2}=\dfrac{\frac{19}{2}}{\frac{9}{2}}=\dfrac{19}{9}$; $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{9}{3}=3$

   $\dfrac{19}{9}\neq 3$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

   Affirmation 3 fausse

4. Dans un repère de l'espace, soit d la droite passant par le point $\mathrm{A}(-3\,;\,7\,;\,-12)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,-2\,;\,5)$.

   Soit d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x&=&2t-1\\ y&=&-4t+3\\ z&=&10t-2.\end{array}\right.$, $t\in\mathbf{R}$

   Affirmation 4 : Les droites d et d' sont confondues.

Les droites sont confondues si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires et si elle ont un point en commun.

- La droite d' a pour vecteur directeur $(2\ ;\ -4\ ;\ 10)$ qui est égal à $2.\overrightarrow{u}$; les droites d et d' sont donc parallèles.
- On regarde si le point A appartient à la droite d', autrement dit s'il existe un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{rcl} -3 &=& 2t-1\\ 7 &=& -4t+3\\ -12 &=& 10t-2 \end{array}\right.$
  La valeur $t=-1$ convient donc $\text{A} \in d'$.

Les deux droites d et d' sont confondues.

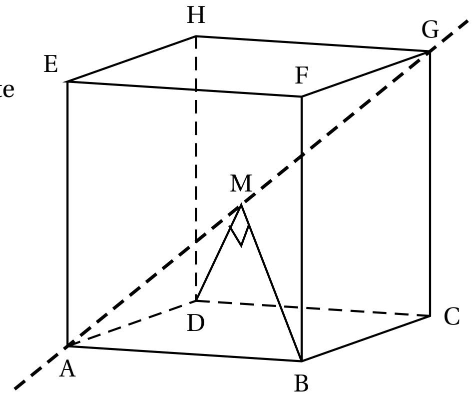
Affirmation 4 vraie

5. On considère un cube ABCDEFGH, L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t \end{array}\right. \quad t \in \mathbf{R}.$$

On considère un point M de la droite (AG).



Affirmation 5 : Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales.

On cherche le point M de (AG) tel que $\overrightarrow{\text{MB}} \perp \overrightarrow{\text{MD}}$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{\text{MB}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}} = 0$.

- $\text{M} \in \text{(AG)}$ donc les coordonnées de M sont de la forme $(t\ ;\ t\ ;\ t)$.
- B a pour coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ donc $\overrightarrow{\text{MB}}$ a pour coordonnées $(1-t\ ;\ -t\ ;\ -t)$.
- D a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ donc $\overrightarrow{\text{MD}}$ a pour coordonnées $(-t\ ;\ 1-t\ ;\ -t)$.
- $\overrightarrow{\text{MB}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}} = -t(1-t)+(1-t)(-t)+(-t)(-t) = -t+t^2-t+t^2+t^2 = 3t^2-2t = t(3t-2)$
- $\overrightarrow{\text{MB}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}} = 0 \iff t(3t-2)=0 \iff t=0 \text{ ou } t=\dfrac{2}{3}$

Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales; soit M est en A (pour $t=0$), soit M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\dfrac{2}{3}\ ;\dfrac{2}{3}\right)$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **Affirmation 1** : Les solutions de l'équation $7x-12y=5$, où x et y sont des entiers relatifs, sont les couples $(-1+12k\ ;\ -1+7k)$ où k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

Les nombres 7 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de BÉZOUT, l'équation $7x-12y=1$ admet des solutions donc l'équation $7x-12y=5$ aussi.
On appelle (E) l'équation $7x-12y=5$.

- Pour tout entier relatif k, si $x=-1+12k$ et $y=-1+7k$, alors
$7x-12y=7(-1+12k)-12(-1+7k)=-7+84k+12-84k=5$; donc le couple $(-1+12k\,;\,-1+7k)$ est solution de l'équation (E).
- On suppose maintenant que le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E). On sait aussi que $(-1\,;\,-1)$ est solution de (E). On a donc :

$$\begin{array}{lcccc} 7x & - & 12y & = & 5\\ 7(-1) & - & 12(-1) & = & 5\\ \hline 7(x+1) & - & 12(y+1) & = & 0 \end{array} \text{ par soustraction membre à membre}$$

Donc $7(x+1)-12(y+1)=0$ ce qui équivaut à $7(x+1)=12(y+1)$.
$7(x+1)=12(y+1)$ donc 7 divise $12(y+1)$; or 7 et 12 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de GAUSS, 7 divise $y+1$. On peut donc écrire $y+1$ sous la forme $7k$ donc $y=-1+7k$.
$7(x+1)=12(y+1)$ et $y+1=7k$ donc $7(x+1)=12\times 7k$ donc $x+1=12k$ ce qui veut dire que $x=-1+12k$.

Donc les solutions de l'équation $7x-12y=5$, où x et y sont des entiers relatifs, sont les couples $(-1+12k\,;\,-1+7k)$ où k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

Affirmation 1 vraie

2. **Affirmation 2** : Pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de $4+3\times 15^n$ par 3 est égal à 1.

$3\equiv 0 \pmod 3$ donc, pour tout n, on a $3\times 15^n\equiv 0 \pmod 3$.
On en déduit que $4+3\times 15^n\equiv 4 \pmod 3$; or $4\equiv 1 \pmod 3$ donc $4+3\times 15^n\equiv 1 \pmod 3$.
Comme $0\leqslant 1<3$, on peut dire que pour tout n, le nombre 1 est le reste de la division de $4+3\times 15^n$ par 3.

Affirmation 2 vraie

3. **Affirmation 3** : L'équation $n\left(2n^2-3n+5\right)=3$, où n est un entier naturel, admet au moins une solution.

On a $n\left(2n^2-3n+5\right)=3$, où n entier naturel; donc n divise 3, donc $n=1$ ou $n=3$.
- Si $n=1$, on a $n\left(2n^2-3n+5\right)=1\,(2-3+5)=4\neq 3$.
- Si $n=3$, on a $n\left(2n^2-3n+5\right)=3\,(18-9+5)=42\neq 3$.

L'équation n'a pas de solution.

Affirmation 3 fausse

4. Soit t un nombre réel. On pose $A=\begin{pmatrix} t & 3\\ 2t & -t\end{pmatrix}$.

Affirmation 4 : Il n'existe aucune valeur du réel t pour laquelle $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$A^2=\begin{pmatrix} t & 3\\ 2t & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 3\\ 2t & -t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2+6t & 3t-3t\\ 2t^2-2t^2 & 6t+t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2+6t & 0\\ 0 & t^2+6t\end{pmatrix}$
$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \iff t^2+6t=1$
$t^2+6t=1 \iff t^2+6t-1=0$; $\Delta=6^2-4\times 1\times(-1)=40>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes; il y a donc deux valeurs de t pour lesquelles $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
Ce sont $-3+\sqrt{10}$ et $-3-\sqrt{10}$.

Affirmation 4 fausse

5. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Affirmation 5 : Pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = (2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_3$.

On va démontrer par récurrence que la propriété $A^n = (2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_3$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 2$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

  $(2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_3$ devient

  $3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = A^2$

  La propriété est donc vérifiée pour $n = 2$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour le rang $n \geqslant 2$ et on va démontrer qu'elle est vraie pour le rang $n + 1$.

  Autrement dit, on suppose $A^n = (2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_3$ et on veut démontrer $A^{n+1} = \left(2^{n+1} - 1\right) A + \left(2 - 2^{n+1}\right) I_3$.

  $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = ((2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_3) \times A = (2^n - 1)\,A^2 + (2 - 2^n)\,A \\ &= (2^n - 1)\,(3A - 2I_3) + 2A - 2^n A = 3 \times 2^n A - 3A - 2^n \times 2I_3 + 2I_3 + 2A - 2^n A \\ &= 2 \times 2^n A - A + 2I_3 - 2^{n+1} I_3 = 2^{n+1} A - A + 2I_3 - 2^{n+1} I_3 \\ &= \left(2^{n+1} - 1\right) A + \left(2 - 2^{n+1}\right) I_3 \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

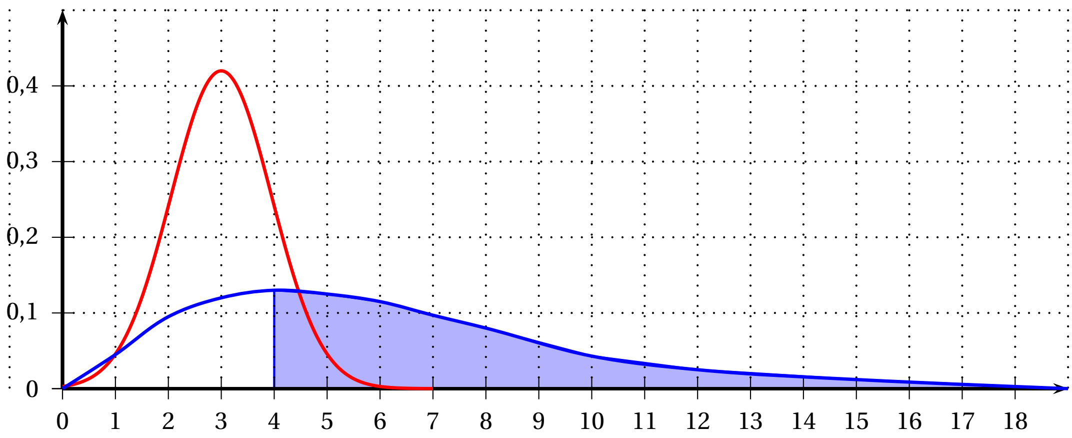
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 2 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 2$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Affirmation 5 vraie

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2 – question 2



Exercice 2 – question 3