

∞ Corrigé du baccalauréat Asie 7 juin 2021 Jour 1 ∞

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.

Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. a. *Initialisation* : on a $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq 2\,500$.

La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leq 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,9u_n + 250 \leq 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n + 1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2\,500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or d'après la question précédente : $u_n \leq 2\,500$, puis $0,1u_n \leq 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leq 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leq -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leq -0,1u_n + 250$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$, soit

$$v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n.$$

L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

b. On sait que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ et, par suite, par produit de limites,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -1\,500 \times 0,9^n = 0$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Déterminer cette année.

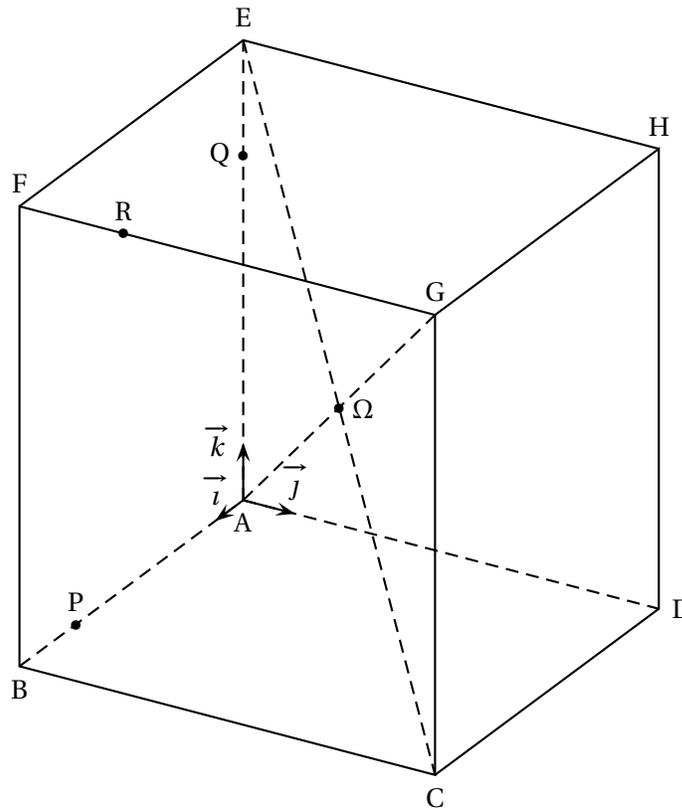
```

n = 0
u = 1000
while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
return n
    
```

Le programme s'arrêtera la 16^e année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats

5 points



Partie I

1. On a $P(6; 0; 0)$ et $Q(0; 0; 6)$.

2. On a $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

+ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6 + 0 + 6 = 0$: les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{PQ} sont orthogonaux;

+ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - 10 + 8 = 0$: les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{PR} sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :

$$M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff 1x - 5y + 1z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } P(6; 0; 0) \in (\text{PQR}) \iff 1 \times 6 - 5 \times 0 + 1 \times 0 + d = 0 \iff d = -6.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff x - 5y + z - 6 = 0.$$

Partie II

1. + Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

+ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) a ses côtés opposés parallèles; c'est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω .

$$\text{Comme } G(8; 8; 8), \text{ les coordonnées de } \Omega \text{ sont donc } \left(\frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2} \right) = (4; 4; 4).$$

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur \vec{n} et contient Ω , donc :

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t \vec{n}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x-4 = t \times 1 \\ y-4 = t \times (-5) \\ z-4 = t \times 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x & = & 4+t \\ y & = & 4-5t \\ z & = & 4+t \\ x-5y+z-6 & = & 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 x - 5y + z - 6 = 0 &\iff 4 + t - 5(4 - 5t) + 4 + t - 6 = 0 \\
 &\iff 2 + 2t - 20 + 25t = 0 \\
 &\iff 27t = 18 \\
 &\iff 9 \times 3t = 9 \times 2 \\
 &\iff 3t = 2 \\
 &\iff t = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve que $L\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

4. Puisque L est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR), la distance de Ω à ce plan est la distance ΩL ; or :

$$\begin{aligned}
 \Omega L^2 &= \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{4 + 100 + 4}{9} \\
 &= \frac{108}{9} \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \Omega L = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}.$$

EXERCICE 3 commun à tous les candidats

5 points

1. a. Il y a 7 tirages contenant la lettre A, puis
6 tirages contenant la lettre B (le tirage AB étant le même que le tirage BA),
5 tirages contenant la lettre C, etc.
Il y a donc : $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{7 \times 8}{2} = 7 \times 4 = 28$ tirages différents.
- b. Les tirages gagnant sont les 6 tirages contenant la lettre A et une consonne et les 6 contenant la lettre E et une consonne : il y a donc $6 + 6 = 12$ tirages gagnants.
La probabilité que le joueur gagne à ce jeu est donc égale à $\frac{12}{28} = \frac{4 \times 3}{4 \times 7} = \frac{3}{7}$.
2. a. On a $P(G = 10 - k) = \frac{3}{7}$ et $P(G = -k) = \frac{4}{7}$. D'où le tableau :

G	$-k$	$10 - k$
$P(G = \dots)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire G est égale à

$$E(G) = -k \times \frac{4}{7} + (10 - k) \times \frac{3}{7} = \frac{-4k + 30 - 3k}{7} = \frac{30 - 7k}{7}.$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G) > 0 \iff \frac{30 - 7k}{7} > 0 \iff 30 - 7k > 0 \iff 7k < 30 \iff k < \frac{30}{7}.$$

$$\frac{30}{7} \approx 4,3.$$

La somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ne doit pas dépasser 4 €.

3. a. Le tirage par un joueur est indépendant de celui des autres et chacun a une probabilité de gagner de $\frac{3}{7}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{7}$.

b. On a $p(X = 4) = \binom{10}{4} \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{10-4} = 210 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^6 \approx 0,2466$, soit 0,247 au millième près.

c. La calculatrice donne $p(X \leq 4) \approx 0,560$ donc

$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx (1 - 0,560).$$

$$\text{Finalement : } p(X \geq 5) \approx 0,440.$$

La probabilité qu'il y ait au moins 5 gagnants sur 10 joueurs est d'environ 0,440.

d. La calculatrice donne :

$$p(X \leq 5) \approx 0,782 \text{ et } p(X \leq 6) \approx 0,921, \text{ donc le plus petit entier } n \text{ tel que}$$

$$P(X \leq n) \geq 0,9 \text{ est donc } n = 6.$$

EXERCICE au choix du candidat**5 points**

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

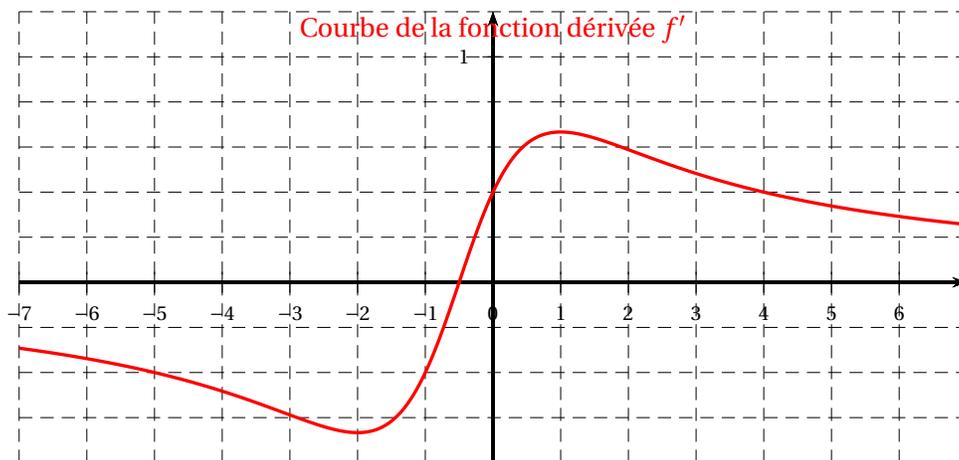
EXERCICE – A**Principaux domaines abordés**

- convexité
- fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



1. On lit $f'(0) = 0,4 = \frac{2}{5}$.

2. a. D'après la figure :

- + $f'(x)$ est croissante si $x \in [-2; 1]$;
- + $f'(x)$ est décroissante si $x < -2$ et si $x > 1$.

b. + $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2; 1]$; la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2; 1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. + On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$, d'où par composition de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

+ On a $x^2 + x + \frac{5}{2} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$.

Donc $f(x) = \ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2x^2 x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$.

Finalement :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty$.

2. On a $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$.

u étant dérivable sur \mathbb{R} et pour le trinôme $x^2 + x + \frac{5}{2}$, $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$, donc

$x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x .

La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$(\ln u)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

3. On a vu que $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ sur \mathbb{R} ; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x + 1$:

$+f'(x) > 0 \iff 2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$;

$+f'(x) < 0 \iff 2x + 1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.

On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln \frac{9}{4}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\ln \frac{9}{4}$	$+\infty$

4. a. Dans la tableau précédent $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{9}{4} \approx 0,81$.

Sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ la fonction f est continue car dérivable et comme $2 \in \left[\ln \frac{9}{4}; +\infty\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

b. La calculatrice donne :

$$f(1) \approx 1,5 \text{ et } f(2) \approx 2,14, \text{ donc } \alpha \in]1; 2[;$$

$$f(1,7) \approx 1,96 \text{ et } f(1,8) \approx 2,02, \text{ donc } \alpha \in]1,7; 1,8[;$$

$$f(1,76) \approx 1,995 \text{ et } f(1,77) \approx 2,002, \text{ donc } \alpha \in]1,76; 1,77[.$$

Conclusion $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près.

5.

La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$: cette fonction est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas, donc sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2+x+\frac{5}{2}) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{2x^2+2x+5-4x^2-4x-1}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \\ &= \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}; f''(x) = \frac{-2[(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{4}-2]}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \\ &= \frac{-2[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}. \end{aligned}$$

Comme $(x^2+x+\frac{5}{2})^2 > 0$, quel que soit le réel x , le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2(x+2)(x-1) = 2(x+2)(1-x)$, soit celui du trinôme $(x+2)(1-x)$. On en déduit le

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+2)(1-x)$	$-$	0	$+$	$-$

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1 . La courbe a donc deux points d'inflexion.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés

- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

Partie I

$$y' = -0,4y + 0,4$$

1. a. $y = K$, avec $K \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, si, avec $y' = 0$,
 $0 = -0,4K + 0,4 \iff 0,4K = 0,4 \iff K = 1$

- b.** + On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -0,4y$ sont les fonctions définies par : $t \mapsto y = Ce^{-0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$;
 + Les solutions de l'équation $y' = -0,4y + 0,4$ sont donc les fonctions :

$$t \mapsto y = 1 + Ce^{-0,4t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

- c.** g définie par $g(t) = 1 + Ce^{-0,4t}$ vérifie :
 $g(0) = 10 \iff 1 + Ce^{-0,4 \times 0} = 10 \iff 1 + C = 10 \iff C = 9$.
 On a donc $g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$

Partie II

- 1.** On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,4t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$.
- 2.** g somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} est dérivable et sur cet intervalle :
 $g'(t) = -0,4 \times 9e^{-0,4t} = -3,6e^{-0,4t}$.
 Or :
 $p(t) = \frac{1}{g(t)} \Rightarrow p'(t) = -\frac{g'(t)}{(g(t))^2} = -\frac{-3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2} = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0 ; +\infty[$.
- 3. a.** Le résultat précédent montre que, comme $3,6 > 0$, $e^{-0,4t} > 0$ quel que soit le réel y , $(1 + 9e^{-0,4t})^2 > 0$, $p'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$: la fonction p est strictement croissante sur cet intervalle.
 Or $p(0) = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} = 0,1$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \frac{1}{1} = 1$.
 Par application du théorème des valeurs intermédiaires comme $\frac{1}{2} \in [0 ; 1]$, il existe un réel unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $p(\alpha) = \frac{1}{2}$.
- b.** La calculatrice donne :
 $p(5) \approx 0,45$ et $p(6) \approx 0,55$, donc $5 < \alpha < 6$;
 $p(5,4) \approx 0,491$ et $p(5,5) \approx 0,501$, donc $5,4 < \alpha < 5,5$;
 $p(5,49) \approx 0,499$ et $p(5,50) \approx 0,501$, donc $5,49 < \alpha < 5,50$.
 Conclusion $\alpha \approx 5,5$ à 10^{-1} près.

Partie III

- 1.** + $p'(t) = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ d'après la question 2.
 $+ 0,4p(t)(1 - p(t)) = 0,4 \times \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}} \times \left(1 - \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}\right)^2 = 0,4 \times \frac{9e^{-0,4t}}{1 + 9e^{-0,4t}} = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$
 donc p est solution de l'équation différentielle.
 De plus on a vu que $p(0) = \frac{1}{10}$.
- 2.** • $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$ signifie qu'à long terme toutes les écoles auront accès à internet.
 • $\alpha \approx 5,5$ signifie qu'au bout de 5 ans et demi la moitié des écoles aura accès à internet.
 • $p(0) = 0,1$ signifie qu'en 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.