

## ∞ Corrigé du baccalauréat Asie 7 juin 2021 Jour 1 ∞

### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

#### EXERCICE 1

5 points

#### Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'abonnés à son profil en l'année  $(2020 + n)$ , suivant cette modélisation. Ainsi  $u_0 = 1\,000$ .

1. On a donc  $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$ .

2. Enlever 10 % c'est multiplier par  $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$ .

Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3.  $u(10)$  donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans; une calculatrice donne  $\approx 1\,977$ .

4. a. *Initialisation* : on a  $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$  : la relation est vraie au rang 0;

*Hérédité* : on suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $u_n \leq 2\,500$ .

La multiplication par  $0,9 > 0$  respectant l'ordre, on a donc  $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500$  ou  $0,9u_n \leq 2\,250$ , puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,9u_n + 250 \leq 2\,250 + 250$ , soit  $u_{n+1} \leq 2\,500$  : la relation est encore vraie au rang  $n + 1$ .

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ , elle est vraie au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 2\,500$ .

b. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$ .

Or d'après la question précédente :  $u_n \leq 2\,500$ , puis  $0,1u_n \leq 0,1 \times 2\,500$  ou encore  $0,1u_n \leq 250$ , soit en prenant les opposés :  $-250 \leq -0,1u_n$  et en ajoutant à chaque membre 250 :  $0 \leq -0,1u_n + 250$ .

On a donc pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ou  $u_{n+1} \geq u_n$  : la suite  $(u_n)$  est croissante.

c. La suite  $(u_n)$  est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5. a. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$ , soit

$$v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n.$$

L'égalité vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 0,9v_n$  montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial  $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$ .

b. On sait que, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,500 \times 0,9^n$ .

Or  $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$ .

c. Comme  $0 < 0,9 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$  et, par suite, par produit de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1\,500 \times 0,9^n = 0$  et finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$ .

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

Déterminer cette année.

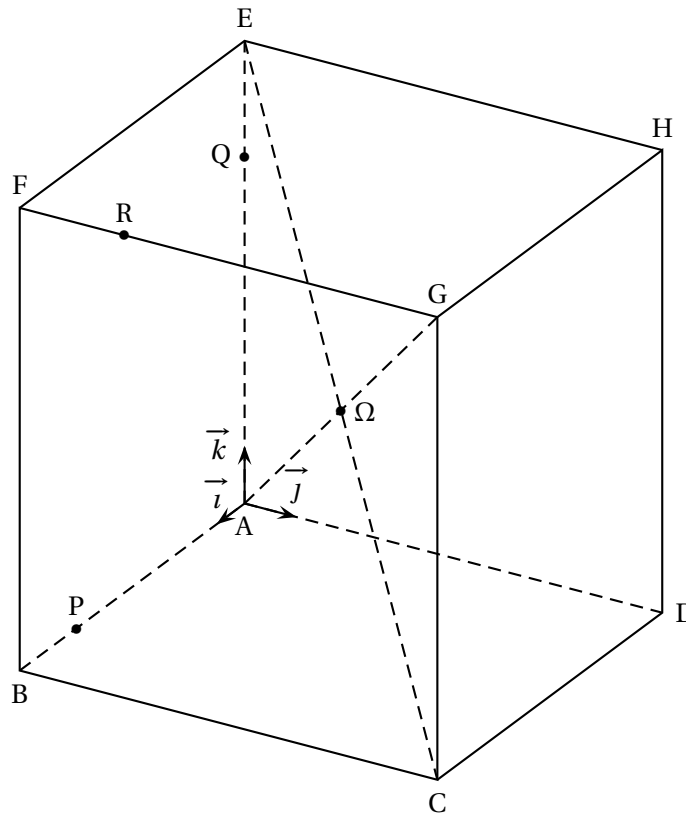
```

n = 0
u = 1000
while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
return n
    
```

Le programme s'arrêtera la 16<sup>e</sup> année.

**EXERCICE 2 commun à tous les candidats**

**5 points**



**Partie I**

1. On a  $P(6; 0; 0)$  et  $Q(0; 0; 6)$ .

2. On a  $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

+  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6 + 0 + 6 = 0$  : les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont orthogonaux;

+  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - 10 + 8 = 0$  : les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{PR}$  sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur  $\vec{n}$  orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :

$$M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff 1x - 5y + 1z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } P(6; 0; 0) \in (\text{PQR}) \iff 1 \times 6 - 5 \times 0 + 1 \times 0 + d = 0 \iff d = -6.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff x - 5y + z - 6 = 0.$$

## Partie II

1. + Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

+ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) a ses côtés opposés parallèles; c'est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu  $\Omega$ .

$$\text{Comme } G(8; 8; 8), \text{ les coordonnées de } \Omega \text{ sont donc } \left( \frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2} \right) = (4; 4; 4).$$

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur  $\vec{n}$  et contient  $\Omega$ , donc :

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t \vec{n}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x-4 = t \times 1 \\ y-4 = t \times (-5) \\ z-4 = t \times 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan (PQR) donc la droite ( $\Omega L$ ) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x & = & 4+t \\ y & = & 4-5t \\ z & = & 4+t \\ x-5y+z-6 & = & 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 x - 5y + z - 6 = 0 &\iff 4 + t - 5(4 - 5t) + 4 + t - 6 = 0 \\
 &\iff 2 + 2t - 20 + 25t = 0 \\
 &\iff 27t = 18 \\
 &\iff 9 \times 3t = 9 \times 2 \\
 &\iff 3t = 2 \\
 &\iff t = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

En reportant cette valeur de  $t$  dans les trois premières équations du système, on trouve que  $L\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$ .

4. Puisque  $L$  est le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur le plan (PQR), la distance de  $\Omega$  à ce plan est la distance  $\Omega L$ ; or :

$$\begin{aligned}
 \Omega L^2 &= \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2 \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{4 + 100 + 4}{9} \\
 &= \frac{108}{9} \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

On a donc  $\Omega L = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ .

### EXERCICE 3 commun à tous les candidats

5 points

1. a. Il y a 7 tirages contenant la lettre A, puis 6 tirages contenant la lettre B (le tirage AB étant le même que le tirage BA), 5 tirages contenant la lettre C, etc.  
Il y a donc :  $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{7 \times 8}{2} = 7 \times 4 = 28$  tirages différents.
- b. Les tirages gagnant sont les 6 tirages contenant la lettre A et une consonne et les 6 contenant la lettre E et une consonne : il y a donc  $6 + 6 = 12$  tirages gagnants.  
La probabilité que le joueur gagne à ce jeu est donc égale à  $\frac{12}{28} = \frac{4 \times 3}{4 \times 7} = \frac{3}{7}$ .
2. a. On a  $P(G = 10 - k) = \frac{3}{7}$  et  $P(G = -k) = \frac{4}{7}$ . D'où le tableau :

$G$	$-k$	$10 - k$
$P(G = \dots)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

**b.** L'espérance mathématique de la variable aléatoire  $G$  est égale à

$$E(G) = -k \times \frac{4}{7} + (10 - k) \times \frac{3}{7} = \frac{-4k + 30 - 3k}{7} = \frac{30 - 7k}{7}.$$

Le jeu est favorable au joueur si :

$$E(G) > 0 \iff \frac{30 - 7k}{7} > 0 \iff 30 - 7k > 0 \iff 7k < 30 \iff k < \frac{30}{7}.$$

$$\frac{30}{7} \approx 4,3.$$

La somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ne doit pas dépasser 4 €.

**3. a.** Le tirage par un joueur est indépendant de celui des autres et chacun a une probabilité de gagner de  $\frac{3}{7}$ ;  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{3}{7}$ .

**b.** On a  $p(X = 4) = \binom{10}{4} \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{10-4} = 210 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 \times \left(\frac{4}{7}\right)^6 \approx 0,2466$ , soit 0,247 au millième près.

**c.** La calculatrice donne  $p(X \leq 4) \approx 0,560$  donc

$$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx (1 - 0,560).$$

$$\text{Finalement : } p(X \geq 5) \approx 0,440.$$

La probabilité qu'il y ait au moins 5 gagnants sur 10 joueurs est d'environ 0,440.

**d.** La calculatrice donne :

$$p(X \leq 5) \approx 0,782 \text{ et } p(X \leq 6) \approx 0,921, \text{ donc le plus petit entier } n \text{ tel que}$$

$$P(X \leq n) \geq 0,9 \text{ est donc } n = 6.$$

**EXERCICE au choix du candidat****5 points**

**Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B**  
**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B**

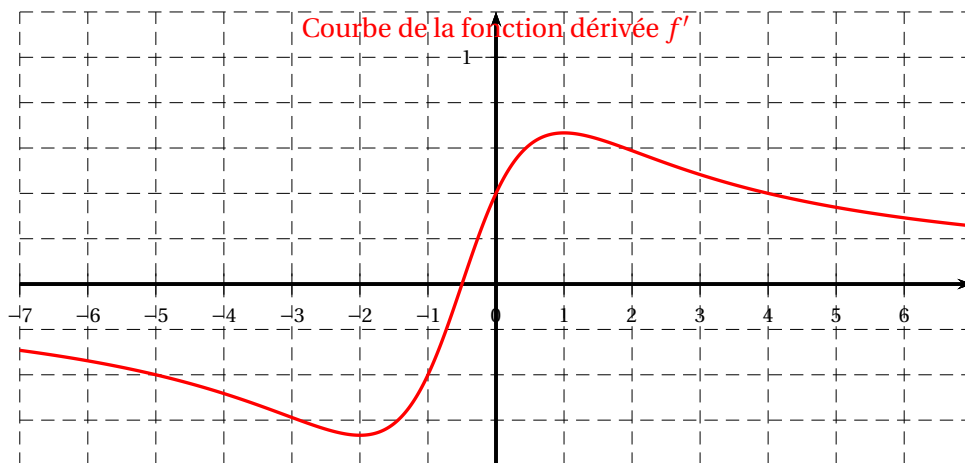
**EXERCICE – A****Principaux domaines abordés**

- convexité
- fonction logarithme

**Partie I : lectures graphiques**

$f$  désigne une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$ .



1. On lit  $f'(0) = 0,4 = \frac{2}{5}$ .

2. a. D'après la figure :

- +  $f'(x)$  est croissante si  $x \in [-2 ; 1]$  ;
- +  $f'(x)$  est décroissante si  $x < -2$  et si  $x > 1$ .

b. +  $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ .

Donc  $f''(x) > 0$  sur l'intervalle  $[-2 ; 1]$  ; la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[-2 ; 1]$ .

**Partie II : étude de fonction**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. + On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$ , d'où par composition de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

+ On a  $x^2 + x + \frac{5}{2} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$ .

Donc  $f(x) = \ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2x^2 x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$ .

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty.$$

2. On a  $f(x) = \ln u(x)$ , avec  $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$ .

$u$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour le trinôme  $x^2 + x + \frac{5}{2}$ ,  $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$ , donc

$$x^2 + x + \frac{5}{2} > 0 \text{ quel que soit le réel } x.$$

La fonction  $\ln u$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$(\ln u)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}.$$

Conclusion : quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$ .

3. On a vu que  $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$  sur  $\mathbb{R}$ ; le signe de  $f'(x)$  est donc celui de  $2x + 1$  :

+  $f'(x) > 0 \iff 2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$  : la fonction  $f$  est croissante sur  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  ;

+  $f'(x) < 0 \iff 2x + 1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2}$  : la fonction  $f$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ .

On a  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln \frac{9}{4}$ .

D'où le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$\ln \frac{9}{4}$	$+\infty$

4. a. Dans la tableau précédent  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{9}{4} \approx 0,81$ .

Sur l'intervalle  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  la fonction  $f$  est continue car dérivable et comme  $2 \in \left[\ln \frac{9}{4}; +\infty\right[$ , il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique  $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  tel que  $f(\alpha) = 2$ .

b. La calculatrice donne :

$$f(1) \approx 1,5 \text{ et } f(2) \approx 2,14, \text{ donc } \alpha \in ]1; 2[;$$

$$f(1,7) \approx 1,96 \text{ et } f(1,8) \approx 2,02, \text{ donc } \alpha \in ]1,7; 1,8[;$$

$$f(1,76) \approx 1,995 \text{ et } f(1,77) \approx 2,002, \text{ donc } \alpha \in ]1,76; 1,77[.$$

Conclusion  $\alpha \approx 1,8$  à  $10^{-1}$  près.

5.

La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a  $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$  : cette fonction est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas, donc sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2+x+\frac{5}{2}) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{2x^2+2x+5-4x^2-4x-1}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \\ &= \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}; f''(x) = \frac{-2[(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{4}-2]}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \\ &= \frac{-2[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}]}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}. \end{aligned}$$

Comme  $(x^2+x+\frac{5}{2})^2 > 0$ , quel que soit le réel  $x$ , le signe de  $f''(x)$  est celui du numérateur  $-2(x+2)(x-1) = 2(x+2)(1-x)$ , soit celui du trinôme  $(x+2)(1-x)$ . On en déduit le

Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$0$	$-$
$(x+2)(1-x)$	$-$	$0$	$+$	$-$

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en  $-2$  et en  $1$ . La courbe a donc deux points d'inflexion.

### EXERCICE – B

#### Principaux domaines abordés

- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

#### Partie I

$$y' = -0,4y + 0,4$$

1. a.  $y = K$ , avec  $K \in \mathbb{R}$  est solution de l'équation, si, avec  $y' = 0$ ,  
 $0 = -0,4K + 0,4 \iff 0,4K = 0,4 \iff K = 1$



**b.** + On sait que les solutions de l'équation différentielle  $y' = -0,4y$  sont les fonctions définies par :  $t \mapsto y = Ce^{-0,4t}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ ;

+ Les solutions de l'équation  $y' = -0,4y + 0,4$  sont donc les fonctions :

$$t \mapsto y = 1 + Ce^{-0,4t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

**c.**  $g$  définie par  $g(t) = 1 + Ce^{-0,4t}$  vérifie :

$$g(0) = 10 \iff 1 + Ce^{-0,4 \times 0} = 10 \iff 1 + C = 10 \iff C = 9.$$

$$\text{On a donc } g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$$

## Partie II

1. On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,4t} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$ .

2.  $g$  somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est dérivable et sur cet intervalle :

$$g'(t) = -0,4 \times 9e^{-0,4t} = -3,6e^{-0,4t}.$$

Or :

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} \Rightarrow p'(t) = -\frac{g'(t)}{(g(t))^2} = -\frac{-3,6e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2} = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2} \text{ pour tout } t \in [0; +\infty[.$$

3. **a.** Le résultat précédent montre que, comme  $3,6 > 0$ ,  $e^{-0,4t} > 0$  quel que soit le réel  $y$ ,  $(1+9e^{-0,4t})^2 > 0$ ,  $p'(t) > 0$  sur  $[0; +\infty[$  : la fonction  $p$  est strictement croissante sur cet intervalle.

$$\text{Or } p(0) = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} = 0,1, \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \frac{1}{1} = 1.$$

Par application du théorème des valeurs intermédiaires comme  $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ , il existe un réel unique  $\alpha \in [0; +\infty[$  tel que  $p(\alpha) = \frac{1}{2}$ .

**b.** La calculatrice donne :

$$p(5) \approx 0,45 \text{ et } p(6) \approx 0,55, \text{ donc } 5 < \alpha < 6;$$

$$p(5,4) \approx 0,491 \text{ et } p(5,5) \approx 0,501, \text{ donc } 5,4 < \alpha < 5,5;$$

$$p(5,49) \approx 0,499 \text{ et } p(5,50) \approx 0,501, \text{ donc } 5,49 < \alpha < 5,50.$$

Conclusion  $\alpha \approx 5,5$  à  $10^{-1}$  près.

## Partie III

1. +  $p'(t) = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}$  d'après la question 2.

$$+0,4p(t)(1-p(t)) = 0,4 \times \frac{1}{1+9e^{-0,4t}} \times \left(1 - \frac{1}{1+9e^{-0,4t}}\right)^2 = 0,4 \times \frac{9e^{-0,4t}}{1+9e^{-0,4t}} = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}$$

donc  $p$  est solution de l'équation différentielle.

De plus on a vu que  $p(0) = \frac{1}{10}$ .

2. •  $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$  signifie qu'à long terme toutes les écoles auront accès à internet.

•  $\alpha \approx 5,5$  signifie qu'au bout de 5 ans et demi la moitié des écoles aura accès à internet.

•  $p(0) = 0,1$  signifie qu'en 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.