

## ✿ Corrigé du baccalauréat Asie 17 mai 2022 Jour 1 ✿

### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

#### EXERCICE 1

7 points

*Principaux domaines abordés* : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les points

$A(-3; 1; 3), B(2; 2; 3), C(1; 7; -1), D(-4; 6; -1)$  et  $K(-3; 14; 14)$ .

1. a. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

b. D'après la question précédente,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  donc ABCD est un parallélogramme.

De plus le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = 0$ .

Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

c. On a  $AB^2 = 25 + 1 = 26$ , d'où  $AB = \sqrt{26}$ ;

de même  $AD^2 = 1 + 25 + 16 = 42$ , d'où  $AD = \sqrt{42}$ .

L'aire du rectangle ABCD est égale à

$$AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{2 \times 13 \times 2 \times 21} = 2\sqrt{13 \times 21} = 2\sqrt{273}.$$

2. a. D'après la question 1., les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

b. Soit le vecteur  $\vec{n}(-2; 10; 13)$ .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -10 + 10 + 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 + 50 - 52 = 0.$$

Conclusion : le vecteur  $\vec{n}$ , orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme

$$-2x + 10y + 13z = d, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Or par exemple  $B(2; 2; 3) \in (ABD)$  donc

$$-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d \iff -4 + 20 + 39 = d \iff d = 55.$$

Donc le plan (ABD) a pour équation  $-2x + 10y + 13z = 55$ .

3. a. Si  $\Delta$  est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{n}$ . Comme elle contient K, on a donc :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{KM} = t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Avec  $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x - (-3) \\ y - 14 \\ z - 14 \end{pmatrix}$  ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} x + 3 = -2t \\ y - 14 = 10t \\ z - 14 = 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de  $\Delta$ ; comme c'est aussi un point de (ABD); ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \\ -2x + 10y + 13z = 55 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la dernière équation  $x, y$  et  $z$  par leurs expressions en fonction de  $t$ , on obtient :

$$-2(-2t - 3) + 10(10t + 14) + 13(13t + 14) = 55$$

$$\iff 4t + 6 + 100t + 140 + 169t + 182 = 55 \iff 273t = -273 \iff t = -1.$$

Les premières équations donnent alors

$$x = 2 - 3 = -1, \quad y = -10 + 14 = 4 \text{ et } z = -13 + 14 = 1.$$

Le point I a donc pour coordonnées  $(-1; 4; 1)$ .

c. ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].

$$\overrightarrow{KI} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix} \text{ donne } KI^2 = 4 + 100 + 169 = 273 \text{ et enfin } KI = \sqrt{273}.$$

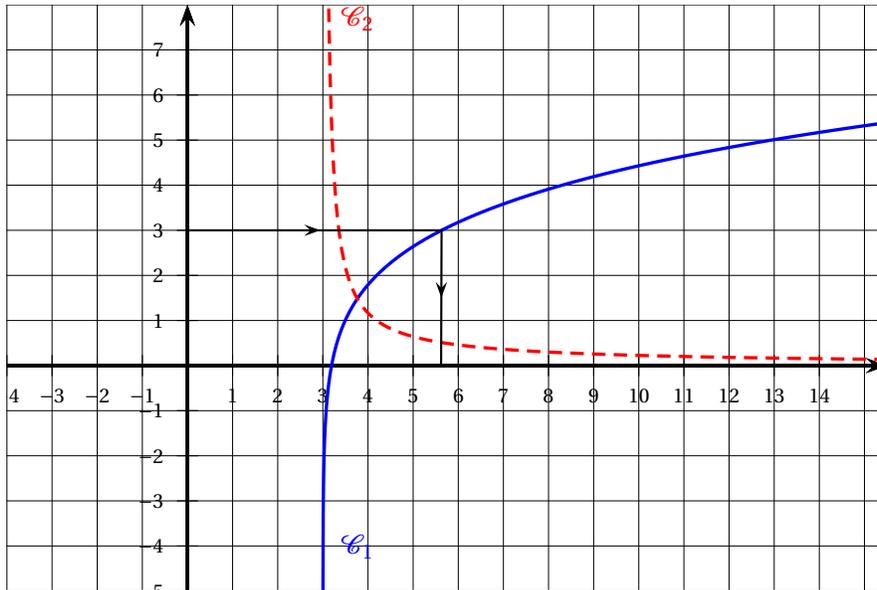
$$4. \text{ On a } V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABCD) \times KI = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273} = \frac{2 \times 273}{3} = \frac{2 \times 3 \times 91}{3} = 182.$$

**EXERCICE 2**

**7 points**

*Principaux domaines abordés* : Étude des fonctions. Fonction logarithme.

**Partie A**



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction  $f$  et de sa fonction dérivée, notée  $f'$ , toutes deux définies sur  $]3 ; +\infty[$ .

1. Si  $\mathcal{C}_1$  était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive, donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représentée par la courbe  $\mathcal{C}_2$ .  
Donc  $\mathcal{C}_2$  est la représentation de la fonction dérivée et  $\mathcal{C}_1$  celle de la fonction.
2. On lit approximativement  $f(5,6) \approx 3$ .
3.  $f$  semble concave sur  $]3 ; +\infty[$ .

**Partie B**

1. •  $x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) = (x + 2)(x - 3)$ .

On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle  $[-2 ; 3]$ . Donc  $\ln(x^2 - x - 6)$  est bien définie sur  $I = ]3 ; +\infty[$ ;

• On peut calculer  $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$  et en déduire les racines du trinôme  $x^2 - x - 6$  :  $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$  et faire ensuite la même conclusion.

2. On admet que la fonction  $f$  de la Partie A est définie par  $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$  sur  $I$ .

• Limite en  $+\infty$  :  $\ln(x^2 - x - 6) = \ln x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = 1.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , par composition de la fonction logarithme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- Limite en 3 :  $f(x) = \ln(x+2)(x-3)$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +3} (x+2)(x-3) = 5 \times 0 = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +3} \ln(x+2)(x-3) = -\infty$ . Ceci signifie que la droite verticale d'équation  $x = 3$  est asymptote à courbe représentative de la fonction  $f$  sur  $I$  (soit  $\mathcal{C}_1$ )

3. a. Sur  $I$ , on a vu que  $x^2 - x - 6 > 0$ , donc la fonction  $f$  est dérivable et sur  $I$ , on a
- $$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}.$$

- b.  $f'(x)$  a le signe du numérateur  $2x - 1$  :

pour  $x > 3$ , on a  $2x - 1 > 5$  donc  $2x - 1 > 0$  et donc  $f'(x) > 0$ .

Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$  de moins l'infini à plus l'infini.

On dresse le tableau des variations de la fonction  $f$ .

$x$	3	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. a. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$  et en particulier sur  $]5; 6[$ .

De plus  $f(5) = \ln(25 - 5 - 6) = \ln 14 \approx 2,64 < 3$  et  $f(6) = \ln(36 - 6 - 6) = \ln 24 \approx 3,18 > 3$ .

La fonction  $f$  étant continue car dérivable sur l'intervalle  $]5; 6[$ , d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 3$ , avec  $5 < \alpha < 6$ .

- b. La calculatrice donne :

$f(5,6) \approx 2,984$  et  $f(5,7) \approx 3,035$ , donc  $5,6 < \alpha < 5,7$  puis

$f(5,63) \approx 2,999$  et  $f(5,64) \approx 3,004$  donc  $5,63 < \alpha < 5,64$ .

5. a. La fonction  $f'$  quotient de fonctions dérivables sur  $I$ , le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur  $I$  et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 - 1 - 4x}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}.$$

- b. Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque  $(x^2 - x - 6)^2 > 0$ .

Or ce trinôme  $-2x^2 + 2x - 13$  n'a pas de racine ( $\Delta = 4 - 8 \times 13 = -100 < 0$ ), donc est négatif en particulier sur  $I$ .

Sur  $I$ ,  $f''(x) < 0$  : la fonction est concave sur cet intervalle.

**EXERCICE 3**

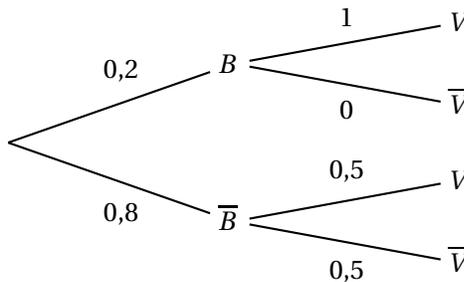
**7 points**

*Principaux domaines abordés :* Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

*Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.*

**Partie 1**

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc  $P_B(V) = 1$ .
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(V) = P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

4. On calcule  $P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$ .

**Partie 2**

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = 206$  et  $p = 0,95$ .
2. On a  $E = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$ . En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a  $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \approx 0,3063$ , soit 0,306 au millième près.
4. La calculatrice donne  $P(X \leq 200) \approx 0,9477$ , soit 0,948 au millième près.  
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que  $Y$  suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

$y_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
$P(C = c_i)$	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

- a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :  $P(Y = 6) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + \dots + P(Y = 5)) = 0,000 03$ .
- b. La compagnie a encaissé  $206 \times 250 = 51 500$  € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc  $C = 51 500 - 850Y$

c. Voir le tableau ci-dessus.

On a  $E(C) = 51\,500 \times 0,94775 + \dots + 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,2$ , soit 51 429 € à l'euro près

d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de  $200 \times 250$  soit 50 000 euros.

En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

#### EXERCICE 4

7 points

*Principaux domaines abordés* : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $p_n$  la probabilité d'obtenir au plus  $n$  descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite  $(p_n)$  est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ .

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite  $(p_n)$

- a. •  $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$  ;
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,092\,2383 = 0,392\,2383$ .

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à  $1 - p_{10} = 1 - 0,428\,020\,18 = 0,571\,171\,82 \approx 0,571$  au millième près.

c. D'après le tableau la suite  $(p_n)$  semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,4285...

2. a. On veut démontrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$ .

*Initialisation* : On a  $0 \leq 0,3 \leq 0,363 \leq 0,5$ , soit  $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$  : la relation est vraie au rang 0.

*Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$ .

Si ces nombres positifs sont rangés dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit

$0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$ , puis en multipliant par 0,7 :

$0 \leq 0,7 \times p_n^2 \leq 0,7 \times p_{n+1}^2 \leq 0,7 \times 0,5^2$  et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :

$0,3 \leq 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leq 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leq 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$ , soit

$0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475$ . On peut donc écrire :

$0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$  : la relation est vraie au rang  $n + 1$ .

*Conclusion* : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ , elle est encore vraie au rang  $n + 1$  : d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite  $(p_n)$  est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite  $L$  telle que  $L \leq 0,5$ .

3. a. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = L$ , la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

$L$  est solution de l'équation  $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$ .

- b. On a  $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$ . Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0,4}{2 \times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0,43$$

On ne peut retenir la solution  $L_1$  puisque  $(p_n)$  est majorée par 0,5. Il reste donc

$$L_2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{7}.$$

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les  $n$  premiers termes de la suite  $(p_n)$ .

On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction suite(n) retourne, sous forme de liste, les  $n$  premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :  
2     p = 0.3  
3     s = [p]  
4     for i in range (n - 1)  
5         p = 0.3+0.7*p*p  
6         s.append(p)  
7     return (s)
```