Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1
Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Exercice 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On a pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 2}{\mathrm{e}^x\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Réponse **b.**

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $[2\,;\,+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles. Réponse **c.**

3. On a pour tout naturel n :
$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5\left(a_n - 2\right) = 0{,}5b_n$.
L'égalité $b_{n+1} = 0{,}5b_n$ montre que la suite $\left(b_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,5.
Réponse **d.**

4. • Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$;
   • On a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$.

   On a donc $1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \dfrac{n}{n+1}$ avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$.
   D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. Réponse **b.**

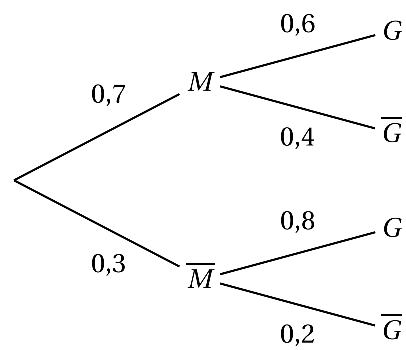
5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
Si $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2 \ln x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x^2 =$ $x^2 \ln x = f(x)$. Réponse **a.**

6. $2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x} + 2 + 3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{5\mathrm{e}^{-x} - 3}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$; en multipliant chaque terme par e^x, on obtient : $\dfrac{5 - 3\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$. Réponse **a.**

Exercice 2 7 points **Thème probabilités**

1. **a.** On a $p(M) = 0{,}7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
   Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0{,}06$ donc
   $p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff 0{,}3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}2$.

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est : $p\left(\overline{M} \cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M \cap G) + p\left(\overline{M} \cap G\right) = 0{,}42 + 0{,}24 = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.

On calcule $p_G(M) = \dfrac{p(G \cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M \cap G}{p(G)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64 > 0{,}5$.

L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}28 + 5 \times 0{,}24 + 0 \times 0{,}06 = 7{,}14 + 3{,}36 + 1{,}2 = 11{,}7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11{,}7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11{,}7}$. Or $\dfrac{700}{11{,}7} \approx 59{,}8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0{,}42(12 + g) + 12 \times 0{,}28 + 0{,}24 \times g + 0 \times 0{,}06 = 5{,}04 + 0{,}42g + 3{,}36 + 0{,}24g = 8{,}4 + 0{,}66g$.

Le responsable veut que :
$8{,}4+0{,}66g=15 \iff 0{,}66g=6{,}6 \iff g=10.$
Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.
La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100;0{,}66)$.
Il faut donc trouver $p(G>75)$. La calculatrice donne $\approx 0{,}979\,7$, soit 0,980 au millième près.

Exercice 3 7 points **Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x\geqslant 1$:
$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

b. Quel que soit x, $x^2\geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1-\ln x$:
- $1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff \mathrm{e}>x$: $f'(x)>0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$;
- $1-\ln x<0 \iff 1<\ln x \iff \mathrm{e}<x$: $f'(x)<0$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
- $1-\ln x=0 \iff 1=\ln x \iff \mathrm{e}=x$.

On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

c. $f(1)=0$ et $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction est strictement croissante de 0 à $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

- *Initialisation*
  $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \mathrm{e}$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
- *Hérédité*
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
  Par croissance de la fonction g, on a : $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\mathrm{e})$ soit
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(\mathrm{e})$
  Or $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{4}} \approx 1{,}97$; donc $g(\mathrm{e}) \leqslant \mathrm{e}$ et l'encadrement précédent devient :
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \mathrm{e}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion*
  L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

3. L'encadrement précédent montre :

— que la suite (u_n) est croissante ;
— que la suite (u_n) est majorée par e.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x \iff \dfrac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction ln.
Or $\dfrac{x}{4} = \ln x \iff \dfrac{1}{4} = \dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x) = \dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $\mathrm{e} < 4$ donc $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D'après la question **3. a.** de la partie A, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0{,}346$;

$f(1{,}4) \approx 0{,}24$ et $f(1{,}5) \approx 0{,}27$, donc $1{,}4 < \ell < 1{,}5$;

$f(1{,}42) \approx 0{,}247$ et $f(1{,}43) \approx 0{,}251$, donc $1{,}42 < \ell < 1{,}43$;

$f(1{,}429) \approx 0{,}249\,8$ et $f(1{,}430) \approx 0{,}250\,1$, donc $1{,}429 < \ell < 1{,}430$;

Finalement $\ell \approx 1{,}43$ au centième près.

Exercice 4 7 points **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{A}(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad \mathrm{B}(1\,;\,1\,;\,2),\qquad \mathrm{C}(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $\mathrm{D}(-1\,;\,6\,;\,8)$ et $\mathrm{E}(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Avec $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur de Δ : $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathrm{DE}) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 &=& 4t\\ y-6 &=& -5t\\ z-8 &=& -2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 6-5t\\ z &=& 8-2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

b. La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ. De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0+4t\\ y &=& 0-5t\\ z &=& 0-2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t\\ y &=& -5t\\ z &=& -2t\end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

c. $\mathrm{F}(1{,}36\,;\,-1{,}7\,;\,-0{,}7) \in \Delta' \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1{,}36 &=& 4t\\ -1{,}7 &=& -5t\\ -0{,}7 &=& -2t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0{,}34$ et la dernière $t = 0{,}35$.
Donc $\mathrm{F} \notin \Delta$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 8 - 10 + 2 = 0$;

De même $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8 + 0 - 8 = 0$.

Donc $\overrightarrow{\text{DE}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ; il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(ABC)} \iff 4x-5y-2z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$

Or $\text{A}(-1\,;\,-1\,;\,3) \in \text{(ABC)}$ donc $4\times(-1)-5\times(-1)-2\times 3+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $-5+d=0 \iff d=5$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(ABC)} \iff 4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{rcr} 7 &=& -1+4t\\ -4 &=& 6-5t\\ 4 &=& 8-2t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution $t=2$, donc $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4)\in\Delta$.

b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& -1+4t\\ y &=& 6-5t\\ z &=& 8-2t\\ 4x-5y-2z+5 &=& 0\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

En replaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0 \iff -4+16t-30+25t-16+4t+5=0 \iff 45t-45=0 \iff 45t=45 \iff t=1$.

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4\,;\,6-5\,;\,8-2)$ soit $\text{H}(3\,;\,1\,;\,6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

Or $\text{GH}^2=(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2=16+25+4=45$, d'où

$\text{GH}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

4. **a.** D'après la question **2. a.**, on a $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=2\times2+2\times0+4\times(-1)=4-4=0$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :

$V=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABC})\times\text{GH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}\times\text{GH}$.

On a $\text{AB}^2=2^2+2^2+(-1)^2=4+4+1=9$, donc $\text{AB}=3$;

$\text{AC}^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20$, donc $\text{AC}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$.

Donc $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times2\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=15$.