

♣ Corrigé du baccalauréat Polynésie 2 juin 2021 ♣
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ n° 2

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. • $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700.$
• $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415.$
2. a. On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4\,000.$

Initialisation : $u_0 = 10\,000 > 4\,000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4\,000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$, soit :

$0,95u_n > 3\,800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

$0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4\,000$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4\,000$ quel que soit le naturel n .

- b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 4\,000$.
3. a. Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000.$

b. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95 \left(u_n - \frac{3\,800}{0,95} \right) = 0,95(u_n - 4\,000) = 0,95v_n.$$

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4\,000$, donc $v_n = u_n - 4\,000 > 0$.

$$\text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} =$$

$$\frac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95 \left(u_n - \frac{3\,800}{0,95} \right)}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n , montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n.$$

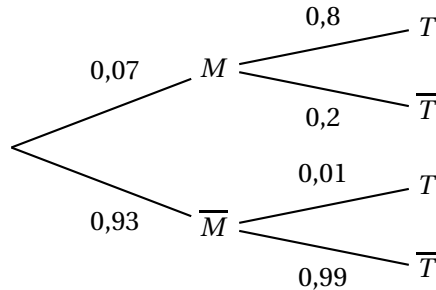
$$\text{Or } v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000.$$

d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4\,000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. a. On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.
 b. On a de même $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
 D'après la loi des probabilités totales :

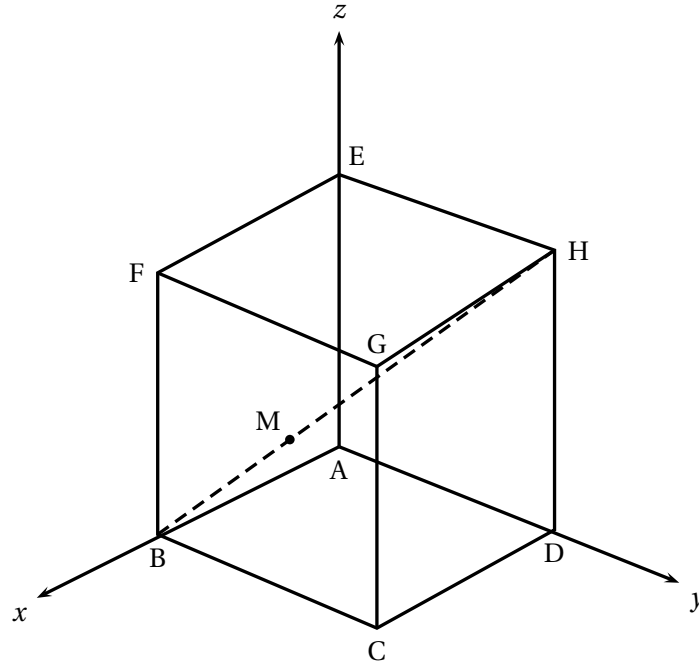
$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$$
3. On calcule $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit 0,86 à 10^{-2} près.
4. a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.
 b. On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$, soit 0,11 à 10^{-2} près.
5. On a $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que :

$$P(X \geq 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$$
 soit en prenant le logarithme népérien :

$$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$$

 Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$.
 Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**



1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a
 $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$.
2. a. $[EG]$, $[GD]$ et $[ED]$ sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b. Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathcal{A}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. On a $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 0 \\ z_M - 0 \end{pmatrix}$.

On a donc : $x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $y_M = \frac{1}{3}$; $z_M = \frac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4. a. On a $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0$:

$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0$.

Conclusion : \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

- b. On sait qu'un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a; b; c)$, donc :

$P(x; y; z) \in (EGD) \iff -x + y + z + d = 0$.

Comme $E(0; 0; 1) \in (EGD) \iff 0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

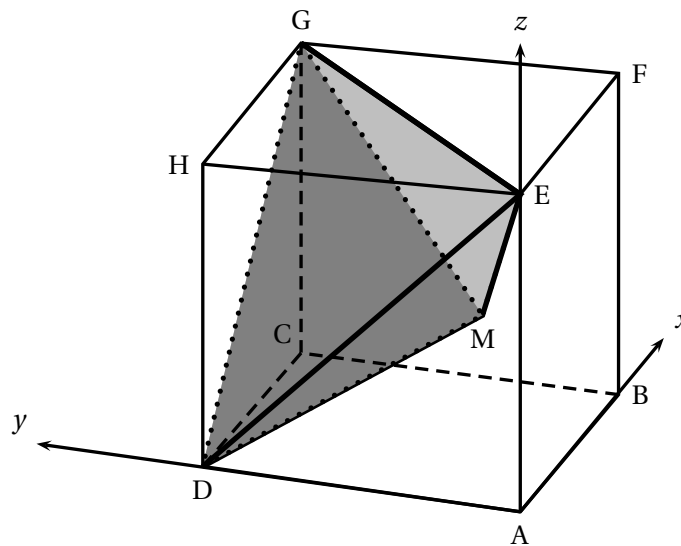
c. La droite \mathcal{D} contient M et a pour vecteur directeur \vec{n} vecteur normal au plan

(EGD), donc avec $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ y - \frac{2}{3} \\ z - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$:

$P(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{MP} = t\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3} = -t \\ y - \frac{1}{3} = t \\ z - \frac{1}{3} = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a. On a vu que la droite \mathcal{D} contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à \mathcal{D} et au plan (EGD); ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \\ -x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de \mathcal{D} , on obtient :

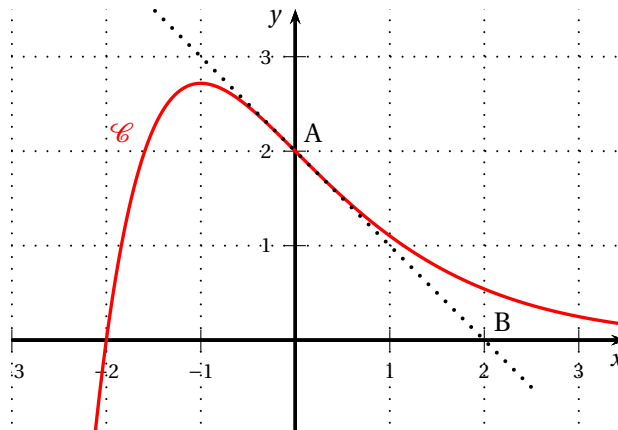
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

b. On en déduit $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

D'où $KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$; on en déduit $KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathcal{A}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{6}$.

EXERCICE au choix du candidat**5 points****EXERCICE A****Partie 1**

- A a pour ordonnée $f(0) = 2$;
 - Le nombre dérivé $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$.
- La fonction f semble convexe sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + e^{-x}$.

- On sait que les solutions de l'équation (H) : $y' = -y$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$x \mapsto xe^{-x} + Ke^{-x} = (x + K)e^{-x}, K \in \mathbb{R}.$$

3. Avec $f(x) = (x + K)e^{-x}$ et $f(0) = 2$, on a : $(0 + K)e^{-0} = 2 \iff K = 2$.
Conclusion : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Partie 3

1. a. Puisque f est solution de l'équation différentielle (E); on a donc
 $f'(x) = -f(x) + e^{-x} = -(x + 2)e^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(-x - 2 + 1) = (-x - 1)e^{-x}$.
- b. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x - 1$. Donc :
 $-x - 1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$;
 $-x - 1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$;
 $-x - 1 = 0 \iff -1 = x$.
- La fonction est donc croissante sur $]-\infty; -1[$, décroissante sur $] -1; +\infty[$ et a donc un maximum $f(-1) = (-1 + 2)e^{-(-1)} = e$.
2. a. De $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$, on obtient en dérivant :
 $f''(x) = -f'(x) - e^{-x} = -(-x - 1)e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x + 1 - 1) = xe^{-x}$.
- b. D'après le résultat précédent sur $[0; +\infty[$, $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc le produit $xe^{-x} \geq 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE B

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$.

1. a. Sur l'intervalle $[1; 4]$, $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \frac{-30x + 35}{x} = \frac{35 - 30x}{x}$.
- b. Puisque $1 \leq x \leq 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7 - 6x)$ donc du facteur $7 - 6x$.
 $7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \frac{7}{6} > x \iff x < \frac{7}{6}$;
 $7 - 6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \frac{7}{6} < x \iff x > \frac{7}{6}$;
 $7 - 6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \frac{7}{6} = x \iff x = \frac{7}{6}$.
- c. La fonction f est donc croissante sur $\left[1; \frac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\frac{7}{6}\right) = -30 \times \frac{7}{6} + 50 + 35 \ln \frac{7}{6} = -35 + 50 + 35 \ln \frac{7}{6} = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \approx 20,4$.
2. f décroît sur $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$ de $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35 \ln 4 = 35 \ln 4 - 70 \approx -21,5$.

x	1	$\frac{7}{6}$	α	4
f	20	$\approx 20,4$	0	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right); f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
 - On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
 - On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
 - On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.
3. On a donc $f(x) \geq 0$ sur $[1; \alpha]$ et $f(x) \leq 0$ sur $[\alpha; 4]$.

Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23,9254$ soit environ 23 925 €.

2. La fonction B est dérivable sur $[1; 4]$ et sur cet intervalle :

$$B'(x) = -30x + 15 + 35 \ln x + 35x \times \frac{1}{x} = 50 - 30x + 35 \ln x = f(x).$$

3. a. D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geq 0$ sur $[1; \alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1; \alpha]$.

De même $f(x) = B'(x) \leq 0$ sur $[\alpha; 4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[\alpha; 4]$.

Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1; 4]$.

b. $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha \ln \alpha$.

En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :

$$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201, \text{ soit environ } 25\,420 \text{ € à l'euro près.}$$

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéfice maximal.