Corrigé du baccalauréat Centres étrangers [1] 21 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(x^2\right) + x - 2$$

1. • On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
   • $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.
2. Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = 2\ln x + x - 2$, d'où :
   $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1$. On a par composition de la dérivation :
   $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{2+x}{x}$.
   Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2 + x$.
   Or $x > 0 \implies 2 + x > 2 > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   La fonction g est donc croissante et d'après la question précédente de moins l'infini à plus l'infini.
3. **a.** D'après la question précédente g est continue car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et croit de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. La calculatrice donne :
   $g(1) = -1$ et $g(2) \approx 1,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   $g(1,3) \approx -0,175$ et $g(1,4) \approx 0,07$, donc $1,3 < \alpha < 1,4$;
   $g(1,37) \approx -0,0004$ et $g(1,38) \approx 0,02$, donc $1,37 < \alpha < 1,38$
4. D'où le tableau de signe :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x)$$

1. **a.** On a successivement :
   $\lim\limits_{x\to 0} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, d'où par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)}{x} = -\infty$;
   D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

1. Europe

b. Géométriquement le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. • On a $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$, il suit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x} = 1$.

• D'autre part on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc par produit de limites, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a par dérivation du produit :

$f'(x) = \dfrac{1\times x - 1\times(x-2)}{x^2}\ln x + \dfrac{x-2}{x}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-x+2}{x^2}\ln x + \dfrac{x-2}{x^2} = \dfrac{2\ln x + x - 2}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.

On a vu à la question A. 4. que :

- :sur l'intervalle $]0\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$;
- :sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]\alpha\,;\,\infty[$.

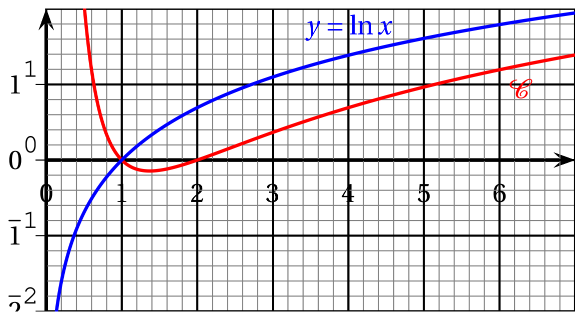
Partie C

$$d(x) = f(x) - \ln x = \frac{(x-2)}{x}\ln(x) - \ln x = \ln x\left[\frac{(x-2)}{x} - 1\right] = \ln x\left[\frac{x-2-x}{x}\right] = \frac{-2}{x}\ln x.$$

La position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.
Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-3\ln x$.
On dresse donc un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
-3	‖	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$-3\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe logarithme népérien et, sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la courbe logarithme népérien.



Exercice 2 **5 points**

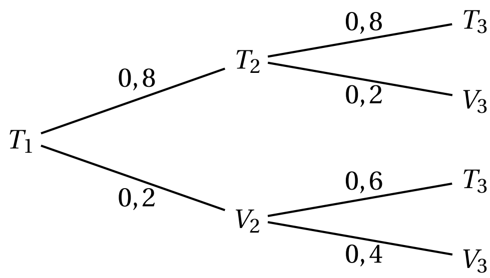
S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'évènement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »
- V_n l'évènement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'évènement T_n,

Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'évènement T_1 est $p_1 = 1$.

1. 2e et 3e jours,



2. Calculer p_3

D'après la loi des probabilités totales : $p_3 = p\left(T_2 \cap T_3\right) + p\left(V_2 \cap T_3\right)$.

$p\left(T_2 \cap T_3\right) = p\left(T_2\right) \times p_{T_2}\left(T_3\right) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$. De même :

$p\left(V_2 \cap T_3\right) = p\left(V_2\right) \times p_{V_2}\left(T_3\right) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.

Donc $p_3 = 0,64 + 0,12 = 0,76$.

3. Le 3e jour, M. Durand utilise son vélo.

Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

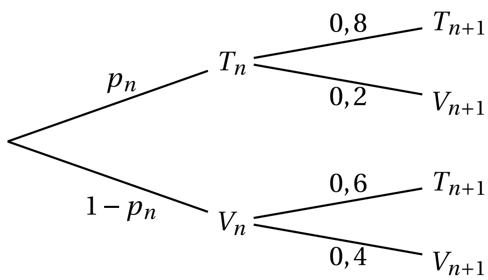
On calcule $p_{V_3}\left(T_2\right) = \dfrac{p\left(V_3 \cap T_2\right)}{p\left(V_3\right)} = \dfrac{p\left(T_2 \cap V_3\right)}{p\left(V_3\right)}$.

Or $p\left(V_3\right) = 1 - p_3 = 1 - 0,76 = 0,24$ et

$p\left(T_2 \cap V_3\right) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$, d'où

$p_{V_3}\left(T_2\right) = \dfrac{0,16}{0,24} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

On a $p_{n+1} = p\left(T_{n+1}\right) = p\left(T_n \cap T_{n+1}\right) + p\left(V_n \cap T_{n+1}\right) = 0,8p_n + 0,6\left(1 - p_n\right) = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a $p_1 = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{1-1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^0 = 0,72 + 0,25 = 1$: la relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que $p_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

Alors d'après la question 5. $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$, donc $p_{n+2} = 0,2p_{n+1} + 0,6$, d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$p_{n+2} = 0,2\left(0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}\right) + 0,6 = 0,15 + 0,25 \times 0,2^n + 0,6 = 0,75 + \times 0,2^n + 0,6$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang et si elle vrai au rang n au moins égal à 1 elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{n-1}$.

7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $-1 < 0,2 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,25 \times 0,2^{n-1} = 0$ et par somme de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,75 = \dfrac{3}{4}$.

Au bout d'un certain nombre de jours Monsieur Durand prendra les transports en commun 3 jours sur 4.

EXERCICE 3 — 5 points

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par :
Avec $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$, on a $F'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1 + x - 1) = x\mathrm{e}^x$. Réponse **b.**

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction est définie quand l'argument du logarithme est supérieur à zéro donc quand
$\dfrac{x-1}{2x+4} > 0$ ou ce qui revient au même quand $(x-1)(2x+4) = 0$.
Or ce trinôme du second degré a deux zéros-2 et 1 et son coefficient dominant est $+2$, donc ce trinôme est positif sauf entre les racines -2 et 1. Réponse **c.**

3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ est :

On peut calculer $h'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$, puis $h''(x) = (x+3)\mathrm{e}^x$.

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x le signe de $h''(x)$ est celui de $x+3$ qui est positif sur

$]-3\ ;\ +\infty[$. Sur cet intervalle la fonction est convexe. Réponse **d.**

4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.

La limite est supérieure ou égale à 3. Réponse **b.**

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif,

$w_{n+1} = \dfrac{1}{n} w_n$. On peut démontrer rapidement par récurrence de :

$w_1 = 2, \quad w_2 = \dfrac{2}{2}, \quad w_3 = \dfrac{2}{2 \times 3}, \quad w_4 = \dfrac{2}{2 \times 3 \times 4}, \ldots$

que $w_n = \dfrac{2}{n!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n!} = 0$. Réponse **d.**

EXERCICE 4 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(-1 ; -3 ; 2), \quad \text{B}(3 ; -2 ; 6) \quad \text{et} \quad \text{C}(1 ; 2 ; -4).$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathcal{P}$.

2. a. On a :
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 4 \times 13 + 1 \times (-16) + 4 \times (-9) = 52 - 16 - 36 = 52 - 52 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times 13 + 5 \times (-13) + (-6 \times (-9) = 26 - 65 + 54 = 52 - 52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$: il est normal à ce plan.

b. On sait que $M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz + d = 0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple $\vec{n}$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \iff 13x - 16y - 9z + d = 0$.

par exemple $\text{C}(1 ; 2 ; -4) \in \mathcal{P} \iff 13 \times 1 + 2 \times (-16) - 9 \times (-4) + d = 0 + d = 0 \iff 13 - 32 + 36 + d = 0 \iff 17 + d = 0 \iff d = -17$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \iff 13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point F(15 ; −16 ; −8) et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. La droite $\mathcal{D}$ étant orthogonale au plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} x - 15 & = & 13t \\ y + 16 & = & -16t \\ z + 8 & = & -9t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$

4. Si E$(x ; y ; z)$ est commun à la droite $\mathcal{D}$ et au plan $\mathcal{P}$, ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 15 & = & 13t \\ y + 16 & = & -16t \\ z + 8 & = & -9t \\ 13x - 16y - 9z - 17 & = & 0 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$13(13t + 15) - 16(16t - 16) - 9(-9t - 8) - 17 = 0 \iff 169t + 195 + 256t + 256 + 81t + 72 - 17 = 0 \iff 506t + 506 = 0 \iff t = -1$.

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$, on obtient :

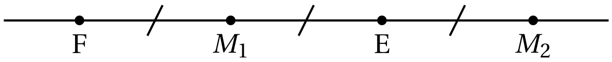
$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 15 & = & -13 \\ y + 16 & = & 16 \\ z + 8 & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc E(2; 0; 1).

5. F et E appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donc la distance du point F au plan est égale à FE.

Or $\text{FE}^2 = (-13)^2 + 16^2 + 9^2 = 169 + 256 + 81 = 506$. D'où $\text{FE} = \sqrt{506}$.

6. Comme précédemment si $M \in \mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ la distance de ce point au plan $\mathscr{P}$ est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_1}\begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - 2 & = & 6,5 \\ y_1 - 0 & = & -8 \\ z - 1 & = & -4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 8,5 \\ y_1 & = & -8 \\ z & = & -3,5 \end{array}\right.$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_2} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_2}\begin{pmatrix} -6,5 \\ 8 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 - 2 & = & 6,5 \\ y_2 - 0 & = & -8 \\ z_2 - 1 & = & -4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 8,5 \\ y_2 & = & -8 \\ z_2 & = & -3,5 \end{array}\right.$$

Donc $M_1(8,5\,;\,-8\,;\,-3,5)$ et $M_2(8,5\,;\,-8\,;\,-3,5)$