Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9

Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une enquête réalisée dans le Centre de Documentation et d'Information (CDI) d'un lycée donne les résultats suivants :
$\mathbf{60\%}$ des élèves fréquentant le CDI sont des filles et, parmi elles, $\mathbf{40\%}$ sont en seconde, $\mathbf{30\%}$ en première et le reste en terminale. Parmi les garçons fréquentant le CDI, $\mathbf{50\%}$ sont en seconde, $\mathbf{20\%}$ en première et le reste en terminale.

Partie A

On interroge au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les événements suivants :
F : "l'élève interrogé est une fille", G : "l'élève interrogé est un garçon",
S : "l'élève interrogé est en seconde ", P : "l'élève interrogé est en première",
T : "l'élève interrogé est en terminale".

I-A-1- Compléter l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.

I-A-2- Donner la probabilité P_1 que l'élève interrogé soit une fille de seconde.

I-A-3- Donner la probabilité P_2 que l'élève interrogé soit en seconde.

I-A-4- L'élève interrogé est en seconde. Déterminer la probabilité P_3 que ce soit une fille. Justifier la réponse. Puis donner une valeur approchée à $\mathbf{10^{-4}}$ près de P_3.

I-A-5- L'élève interrogé n'est pas en seconde. Donner une valeur approchée à $\mathbf{10^{-4}}$ près de la probabilité P_4 que ce soit un garçon.

Partie B

Durant une pause, le CDI accueille n élèves. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de filles parmi ces n élèves.

I-B-1- X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner la valeur de p.

I-B-2- Donner, en fonction de n, la probabilité P_5 qu'il n'y ait aucune fille.

I-B-3- Donner, en fonction de n, la probabilité P_6 qu'il y ait au moins une fille.

I-B-4- Déterminer le nombre minimal n_0 d'élèves accueillis au CDI durant cette pause pour que la probabilité qu'il y ait au moins une fille soit supérieure à $\mathbf{0,99}$. Détailler les calculs.

Partie C

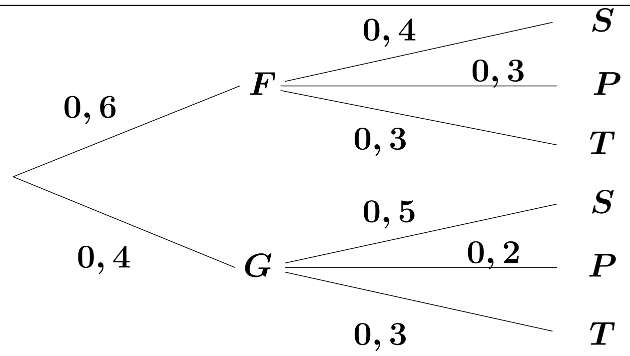
On rappelle que, d'après l'enquête, la proportion de filles fréquentant le CDI est égale à $\mathbf{0,6}$.

I-C-1- Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de filles dans un échantillon de $\mathbf{100}$ élèves pris au hasard, fréquentant le CDI. On admet que F suit une loi normale. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de $\mathbf{95\%}$ de F. Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

I-C-2- En fin de matinée, le documentaliste constate que $\mathbf{100}$ élèves dont $\mathbf{68}$ filles sont venus au CDI. Peut-on affirmer, au seuil de risque de $\mathbf{5\%}$, que la fréquence des filles observée au CDI dans la matinée confirme l'hypothèse de l'enquête ? Expliquer pourquoi.

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-



I-A-2- $P_1 = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

I-A-3- $P_2 = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,5 = 0,44$

I-A-4- $P_3 = \dfrac{6}{11}$ $\qquad P_3 \simeq 0,5455$ $\qquad$ En effet :

$$P_3 = \mathbb{P}_S(F) = \frac{\mathbb{P}(F \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{0,24}{0,44} = \frac{6}{11}$$

I-A-5- $P_4 \simeq 0,3571$

I-B-1- $p = 0,6$

I-B-2- $P_5 = 0,4^n$

I-B-3- $P_6 = 1 - 0,4^n$

I-B-4- $n_0 = 6$ car

$$\begin{aligned} P_6 \geq 0,99 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 0,4^n \geq 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 0,4^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \quad n \ln 0,4 \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln 0,4} = 5,025... \quad \text{car} \quad \ln(0,4) < 0. \end{aligned}$$

I-C-1- $I = [0,504; 0,696]$ car $I = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$

donc $I = \left[0,6 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{100}} \,;\, 0,6 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{100}}\right]$.

I-C-2- L'hypothèse **est** confirmée car $0,68 \in I$

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie A

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]1\,;\,+\infty[, \qquad g(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II-A-1- g' désigne la dérivée de g. Déterminer, pour tout $x > 1$, $g'(x)$. Détailler les calculs.

II-A-2- On donne ci-dessous le tableau des variations de g :

x	1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Donner la valeur de x_0. Calculer $g(x_0)$.

II-A-3- Soit m un réel. Donner, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = m$.

II-A-4-a- Déduire de la question précédente que l'équation $g(x) = 4$ a deux solutions. On les notera x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.

II-A-4-b- Sur la figure est représentée la courbe $\mathcal{C}_g$. Placer les valeurs x_1 et x_2. Laisser les traits de construction.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]0\,;\,+\infty[, \qquad f(x) = x - 4\ln x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le même repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II-B-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

II-B-1-b- Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

II-B-2- f' désigne la dérivée de f. Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

II-B-3- Soit I le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en I.

II-B-4- Dresser le tableau des variations de f. f admet un extremum au point M de coordonnées (x_M, y_M). Donner les valeurs exactes de x_M et de y_M, ainsi qu'une valeur approchée de y_M à 10^{-1} près.

II-B-5-a- Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution appartenant à $]0; 1]$.

II-B-5-b- On considère un point P de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$. Montrer que P appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $g(x) = 4$.

II-B-6- Sur la figure de la question **II-A-4-b-**, placer les points I et M, les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en I et en M, les points A et B d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1- Pour tout $x > 1$, $\quad g'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

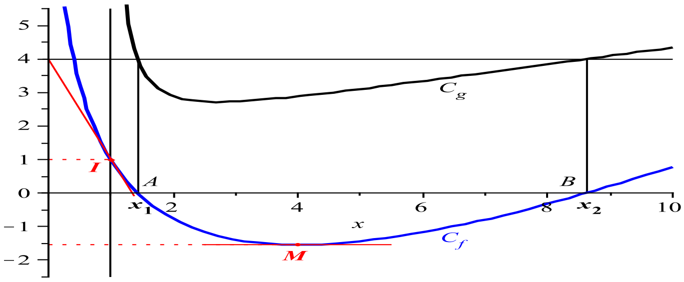
II-A-2- $x_0 = e \qquad g(x_0) = \dfrac{e}{\ln e} = e.$

II-A-3-

Condition sur m	$m < e$	$m = e$	$m > e$
Nombre de solutions de $g(x) = m$	0	1	2

II-A-4-a- L'équation $g(x) = 4$ a deux solutions car $4 > e$.

II-A-4-b-



II-B-1-a- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$

II-B-1-b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln x}{x}\right)$

II-B-2- Pour tout $x > 0$, $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{x-4}{x}$

II-B-3- Equation de la tangente en I : $y = -3x + 4$.

II-B-4-

x	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	-3 $\quad -$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	$4 - 4\ln 4$	↗ $+\infty$

$x_M = 4$

$y_M = 4 - 4\ln 4$

$y_M \simeq -1,5$

II-B-5-a- $f(x) = 0$ n'a pas de solution appartenant à $]0;1]$. En effet : f est décroissante sur $]0;1]$ donc, pour tout x de $]0;1]$, $f(x) \geq f(1)$.
Comme $f(1) = 1$, alors, pour tout x de $]0;1]$, $f(x) \geq 1 > 0$.

II-B-5-b-

$$\begin{aligned}
P \in (xx') &\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } f(x) = 0 \quad \text{d'après } \textbf{II-B-5-a-} \\
&\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } x - 4\ln x = 0 \\
&\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } \frac{x}{\ln x} = 4 \quad \text{car } \ln x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } g(x) = 4.
\end{aligned}$$

II-B-6- Utiliser la figure de la question **II-A-4-b-**

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Partie A

III-A-1- Justifier que l'équation $\cos x = 0,2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$. On notera x_0 cette solution.

III-A-2- On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
        a, b et m sont des réels
        δ est un réel strictement positif
Début de l'Algorithme
        Entrer la valeur de δ
        a prend la valeur 0
        b prend la valeur 3
        Tant que   b − a > δ   faire
                m prend la valeur (a+b)/2
                Si  cos(m) > 0,2  alors
                        a prend la valeur m
                sinon
                        b prend la valeur m
                FinSi
        FinTantque
        Afficher a
        Afficher b
Fin de l'algorithme
```

III-A-2-a- On fait tourner cet algorithme en prenant $\delta = 0,5$. Compléter le tableau en utilisant le nombre de colonnes nécessaires. Quelles sont les valeurs affichées pour a et b à la fin de l'algorithme ?

III-A-2-b- On exécute cet algorithme avec $\delta = 0,1$. Les valeurs affichées sont $1,3125$ pour a et $1,40625$ pour b. Que peut-on en déduire pour x_0 ?

Partie B

On considère la fonction F définie, pour tout réel x de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, par : $F(x) = \sin(2x)$.
On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de F dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

III-B-1- F' désigne la dérivée de F. Déterminer, pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)$.

III-B-2- Dresser le tableau des variations de F.

III-B-3- Tracer la courbe $\mathcal{C}_F$.

Partie C

Soit $t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On note $\mathcal{D}_t$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_F$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = t$. Soit $\mathcal{A}_t$ l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_t$.

III-C-1- Justifier que : $\mathcal{A}_t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.

III-C-2- On considère l'équation (E) : $\mathcal{A}_t = 0,4$.

III-C-2-a- Justifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(2t) = \beta$, où β est un réel à préciser.

III-C-2-b- A l'aide de la question **III-A-2-b-**, donner une valeur approchée à $0,05$ près de la solution t_0 de l'équation (E).

III-C-3- Sur la figure de la question **III-B-3-**, hachurer le domaine $\mathcal{D}_{t_0}$.

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1- L'équation $\cos x = 0,2$ a une unique solution dans $[0\,;\,\pi]$ en effet
La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ et $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.
Comme $0,2$ appartient à $[-1;1]$, d'après le théoreme des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel x_0 appartenant à $[0\,;\,\pi]$ tel que $\cos(x_0) = 0,2$.

III-A-2-a-

	Initialisation	Fin de l'étape 1	Fin de l'étape 2	Fin de l'étape 3	
$m =$		$1,5$	$0,75$	$1,125$	
$\cos m =$		$0,0707...$	$0,7316...$	$0,4311..$	
$a =$	0	0	$0,75$	$1,125$	
$b =$	3	$1,5$	$1,5$	$1,5$	
$b - a =$	3	$1,5$	$0,75$	$0,375$	

Les valeurs affichées à la fin de l'algorithme sont :
pour a : $1,125$ pour b : $1,5$

III-A-2-b- x_0 vérifie : $1,3125 < x_0 < 1,40625$.

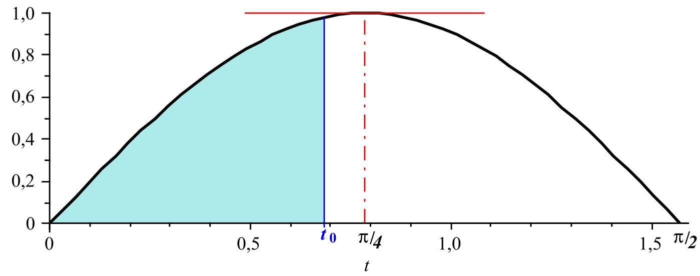
III-B-1- Pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$,

$F'(x) = 2\cos(2x)$

III-B-2-

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$F'(x)$	2	$+$	0	$-$	-2
$F(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

III-B-3-



III-C-1- $\mathcal{A}_t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$ car

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}.$$

III-C-2-a- $\beta = 0,2$ en effet

$\mathcal{A}_t = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\cos(2t) = -0,1$

D'où $\mathcal{A}_t = 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2t) = 0,2$.

III-C-2-b- $t_0 \simeq 0,68$

III-C-3- Utiliser la figure de **III-B-3-**.

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P}_1 \ : \ -2x + y + z = 8 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_2 \ : \ 2x + 5y - z = -20\,.$$

IV-1-a- Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathcal{P}_1$ et d'un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan $\mathcal{P}_2$.

IV-1-b- Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

IV-2- On note $\mathcal{D}_1$ la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

IV-2-a- Justifier que le point $A(-4; -2; 2)$ appartient à $\mathcal{D}_1$.

IV-2-b- Montrer que le vecteur $\vec{u}_1(1; 0; 2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$.

IV-3- Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}_1$ en notant t le paramètre.

IV-4- On considère la droite $\mathcal{D}_2$ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\mathcal{D}_2 \ : \begin{cases} x = 5 \\ y = k \\ z = -2 + k \end{cases} \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Dans cette question, on va montrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires.

IV-4-a- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite $\mathcal{D}_2$.

IV-4-b- Justifier que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles.

IV-4-c- Montrer que l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est vide.

IV-5- Soit H un point de la droite $\mathcal{D}_1$ et K un point de la droite $\mathcal{D}_2$.

IV-5-a- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction des paramètres t et k.

IV-5-b Montrer que la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ si et seulement si on a :

$$5t - 2k = 1\,.$$

IV-5-c- De même, la droite (HK) est perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$ si et seulement si t et k vérifient la condition $at + bk = c$ où a, b, c sont trois réels. Donner les valeurs de ces trois réels.

IV-5-d- Pour quelles valeurs de t et k la droite (HK) est-elle perpendiculaire aux deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$? Donner alors les coordonnées de H et de K.

IV-5-e- Cette perpendiculaire commune (HK) aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ permet de définir la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Cette distance d est égale à la longueur HK. Donner la valeur exacte de d.

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$\vec{n_1}\quad(-2;1;1)$ $\qquad\qquad$ $\vec{n_2}\quad(2;5;-1)$
IV-1-b-	$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants car $\vec{n}_1.\vec{n}_2=0$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires autre explication : les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires.
IV-2-a-	$A\in\mathcal{D}_1$ car d'une part $-2x_A+y_A+z_A=8-2+2=8$ donc $A\in\mathcal{P}_1$ d'autre part $2x_A+5y_A-z_A=-8-10-2=-20$ donc $A\in\mathcal{P}_2$ donc $A\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\mathcal{D}_1$
IV-2-b-	$\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ car d'une part $\vec{u}_1.\vec{n_1}=0$ donc $\vec{u}_1\perp\vec{n_1}$, d'autre part $\vec{u}_1.\vec{n_2}=0$ donc $\vec{u}_1\perp\vec{n_2}$, donc $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.
IV-3-	$\mathcal{D}_1\ :\left\{\begin{array}{l}x=-4+t\\y=-2\\z=2+2t\end{array}\right.$ $\qquad$ avec $t\in\mathbb{R}$.
IV-4-a-	$\vec{u}_2\quad(0;1;1)$
IV-4-b-	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
IV-4-c-	$\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\emptyset$ car $M(x;y;z)\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$ si et seulement s'il existe un couple de réels (t,k) tel que : $\left\{\begin{array}{l}5=-4+t\\k=-2\\-2+k=2+2t\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}t=9\\k=-2\\-4=20\quad\text{impossible}\end{array}\right.$ ce système n'a donc pas de solution.
IV-5-a-	$\overrightarrow{HK}\,(9-t\,;\,k+2\,;\,-4+k-2t)$
IV-5-b-	$(HK)\perp\mathcal{D}_1\iff\overrightarrow{HK}\,.\,\vec{u_1}=0$ $\iff(9-t)\times1+(k+2)\times0+(-4+k-2t)\times2=0$ $\iff 5t-2k=1$
IV-5-c-	$a=-1$ $\qquad$ $b=1$ $\qquad$ $c=1$
IV-5-d-	$t=1$ $\qquad$ $k=2$ $H(-3;-2;4)$ $\qquad$ $K(5;2;0)$
IV-5-e-	$d=\sqrt{8^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$