Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE I

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Une librairie a effectué une étude auprès de ses clients concernant leur durée de passage et leur mode de paiement ainsi qu'une étude sur le prix des livres.

Partie A
La durée de passage, en minutes, d'un client peut être modélisée par une variable aléatoire T ayant pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = 0{,}02\ e^{-0{,}02\,x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Soit t un réel strictement positif. La probabilité $\mathbb{P}(T \leq t)$ que la visite d'un client dans cette librairie dure moins de t minutes est alors donnée par : $\mathbb{P}(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx$.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

- **I-A-1-** Quelle est la loi suivie par T ? Préciser son paramètre.
- **I-A-2-a-** Déterminer, avec le calcul d'une intégrale, la probabilité P_1 qu'un client reste moins de 15 minutes dans la librairie. Détailler le calcul.
- **I-A-2-b-** Donner la probabilité P_2 qu'un client reste plus de 15 minutes dans la librairie.
- **I-A-3-** Déterminer la probabilité P_3 qu'un client reste plus de 20 minutes dans la librairie sachant qu'il y est déjà depuis 15 minutes. Justifier le résultat.
- **I-A-4-** Donner, en minutes, la durée moyenne de passage m_0 d'un client dans la librairie.

Partie B
On estime à $0{,}1$ la probabilité qu'un client règle ses achats par chèque, lorsque leur montant est inférieur à 25 euros. Un matin, 20 clients font des achats d'un montant inférieur à 25 euros. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients, parmi ceux-là, ayant réglé leurs achats par chèque.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

- **I-B-1-** Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
- **I-B-2-** Donner la probabilité P_4 que trois clients exactement règlent leurs achats par chèque.
- **I-B-3-** Donner la probabilité P_5 qu'au moins deux clients règlent leurs achats par chèque.

Partie C
On note Y la variable aléatoire qui, à un livre choisi au hasard dans la librairie, associe son prix, en euros. On admet que Y suit une loi normale de moyenne $m = 20$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On prend au hasard un livre dans la librairie.

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.

- **I-C-1-** Donner la probabilité P_6 que le prix de ce livre soit inférieur à 25 euros.
- **I-C-2-** Donner la probabilité P_7 que le prix de ce livre soit supérieur à 35 euros.
- **I-C-3-** Donner la probabilité P_8 que le prix de ce livre soit compris entre 10 et 15 euros.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE I

I-A-1-	Loi suivie par T et paramètre de cette loi : T suit une loi exponentielle de paramètre $\mathbf{0{,}02}$.
I-A-2-a-	$P_1 = 1 - e^{-0{,}3}$ $P_1 \simeq 0{,}2592$ en effet : $P_1 = \mathbb{P}(T \leq 15) = \int_0^{15} 0{,}02\ e^{-\,0{,}02\,x}\,dx = \left[-e^{-\,0{,}02\,x}\right]_0^{15}$ donc $P_1 = -e^{-\,0{,}02\times 15} - (-e^0) = 1 - e^{-0{,}3}$.
I-A-2-b-	$P_2 = e^{-0{,}3}$ $P_2 \simeq 0{,}7408$
I-A-3-	$P_3 = e^{-0{,}1}$ $P_3 \simeq 0{,}9048$ en effet : $P_3 = \mathbb{P}_{(T>15)}(T > 20) = \dfrac{\mathbb{P}((T > 15) \cap (T > 20))}{\mathbb{P}(T > 15)} = \dfrac{\mathbb{P}(T > 20)}{\mathbb{P}(T > 15)}$ donc $P_3 = \dfrac{e^{-\,0{,}02\times 20}}{e^{-\,0{,}02\times 15}} = e^{-\,0{,}02\times 5} = e^{-\,0{,}1}$.
I-A-4-	$m_0 = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$ minutes
I-B-1-	Loi suivie par X et paramètres de cette loi : X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.

I-B-2-	$P_4 \simeq 0{,}1901$	**I-B-3-**	$P_5 \simeq 0{,}6083$
I-C-1-	$P_6 \simeq 0{,}8413$	**I-C-2-**	$P_7 \simeq 0{,}0013$
I-C-3-	$P_8 \simeq 0{,}1359$		

EXERCICE II

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction f_n définie par :

$$\text{pour tout réel} \quad x \in [0\,;\,+\infty[, \qquad f_n(x) = n\,x\,e^{-n\,x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

II-1-a- Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

II-1-b- On en déduit que $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

II-2-a- f'_n désigne la dérivée de f_n.

Justifier que : pour tout réel $x \in [0\,;\,\infty[$, $\quad f'_n(x) = n\,e^{-n\,x}\,(1 - n\,x)$.

II-2-b- Dresser le tableau des variations de f_n.

II-2-c- f_n présente un maximum en un point M_n. Donner les coordonnées de M_n.

II-3-a- Justifier que :
pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad f_2(x) - f_1(x) = x\,e^{-2\,x}\,(2 - e^x)$.

II-3-b- On déduit de la question **II-3-a-** que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points communs P et Q d'abscisses respectives p et q (avec $p < q$).

Donner les valeurs exactes de p et q et une valeur approchée de q à 10^{-1} près.

II-3-c- Donner, pour tout réel $x \in [0\,;\,+\infty[$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

II-4- Sur la figure est tracée la courbe $\mathcal{C}_1$.

Placer les points M_1, M_2, P et Q.

Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point M_2, puis tracer la courbe $\mathcal{C}_2$.

II-5- On considère la fonction F définie par :

$$\text{pour tout réel} \quad x \in [0\,;\,+\infty[, \qquad F(x) = -\,(x + 1)\,e^{-x}.$$

II-5-a- Justifier que F est une primitive de la fonction f_1.

II-5-b- On considère l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} x\,e^{-x}\,dx.$$

Hachurer, sur la figure de la question **II-4-**, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut $\mathcal{A}$.

II-5-c- Déterminer $\mathcal{A}$. Détailler le calcul.

Le résultat sera écrit sous la forme $\mathcal{A} = \dfrac{1}{a}\,(b - c\,\ln 2)$ où a, b et c sont des entiers à déterminer.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE II

II-1-a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

II-1-b- $\Delta \ : \ y \ = \ 0$

II-2-a- Pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = ne^{-\,n\,x}\,(1 \;-\; n\,x)$ en effet :
Pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = nx$ et $v(x) = e^{-nx}$.
Comme $(uv)' = u'v + uv'$, on a alors :
Pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = ne^{-\,n\,x} + nx(-ne^{-\,n\,x}) = ne^{-\,n\,x}\,(1\; - nx)$.

II-2-b-

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

II-2-c- $M_n\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{e}\right)$

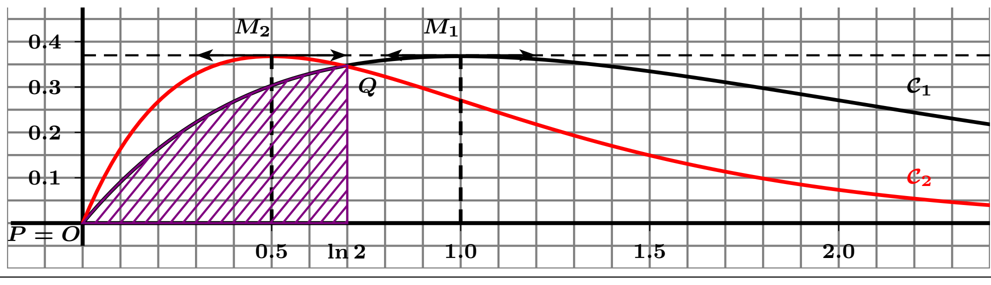
II-3-a- Pour tout $x \geq 0$, $f_2(x) - f_1(x) = x\,e^{-2x}\,(2 - e^x)$ en effet :
$f_2(x) - f_1(x) = 2xe^{-2x} - xe^{-x} = 2xe^{-2x} - xe^{-2x}e^x = xe^{-2x}\,(2 - e^x)$.

II-3-b- $p = 0$ $q = \ln 2$ $q \simeq 0{,}7$

II-3-c-

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
Signe de $f_2(x) - f_1(x)$	$+$	0	$-$
Position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_2$ est au dessus de $\mathcal{C}_1$		$\mathcal{C}_2$ est en dessous de $\mathcal{C}_1$

II-4-



II-5-a- F est une primitive de f_1 en effet :

$F'(x) = -\,\left(1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x})\right) = xe^{-x} = f_1(x)$.

II-5-b- Utiliser la figure de la question **II-4-**

II-5-c- $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$, en effet : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f_1(x)dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$.
Or $F(0) = -e^{-0} = -1$,
et $F(\ln 2) = -(1 + \ln 2)e^{-\ln 2} = -(1 + \ln 2)\dfrac{1}{e^{\ln 2}} = -\dfrac{1}{2}(1 + \ln 2)$.
Donc $\mathcal{A} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln 2}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

EXERCICE III

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

On considère les points A, B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Partie A

III-A-1- Tracer le triangle ABC sur la figure.
III-A-2- Donner l'affixe z_C du point C.
III-A-3-a- Calculer le module $|z_B - z_A|$. Détailler le calcul.
III-A-3-b- Donner les modules $|z_C - z_A|$ et $|z_C - z_B|$.
III-A-3-c- En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère les points suivants :
I **:** projeté orthogonal du point O sur la droite (BC),
J **:** projeté orthogonal du point O sur la droite (AC),
K **:** projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).
On désigne par z_I, z_J et z_K leurs affixes respectives.

III-B-1- Placer les points I, J et K sur la figure de la question **III-A-1-**.
III-B-2-a- Justifier que J est le milieu du segment $[AC]$.
III-B-2-b- Calculer alors l'affixe z_J de J. Donner son module $|z_J|$.
III-B-2-c- Donner les affixes z_I et z_K ainsi que leur module $|z_I|$ et $|z_K|$.
III-B-3- En déduire la valeur de la somme des distances : $L_O = OI + OJ + OK$.
Justifier la réponse.

Partie C

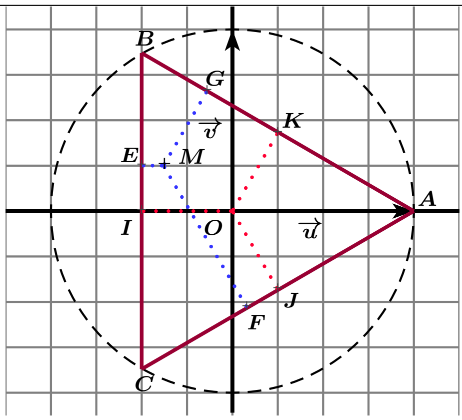
Soit M un point quelconque situé à l'intérieur du triangle ABC.
On considère les points suivants :
E **:** projeté orthogonal de M sur la droite (BC),
F **:** projeté orthogonal de M sur la droite (AC),
G **:** projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
On note $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}$ les aires respectives des triangles MBC, MAC, MAB et ABC.
On pose $L_M = ME + MF + MG$.

III-C-1- Avec le point M déjà placé sur la figure de la question **III-A-1-**, placer les points E, F et G.
III-C-2-a- Exprimer $\mathcal{A}_1$ en fonction de la distance ME.
III-C-2-b- Ecrire une relation liant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}$.
III-C-2-c- Déduire des questions précédentes que : $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L_M$.
III-C-3- L'égalité précédente montre que la valeur de L_M ne dépend pas de la position du point M à l'intérieur du triangle ABC.
Donner la valeur de L_M. Justifier la réponse.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-



III-A-2- $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

III-A-3-a- $|z_B - z_A| = \sqrt{3}$

En effet :

$$z_B - z_A = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z_B - z_A| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

III-A-3-b- $|z_C - z_A| = \sqrt{3}$ $\qquad$ $|z_C - z_B| = \sqrt{3}$

III-A-3-c- Nature du triangle ABC : ABC est un triangle équilatéral.

III-B-1- Utiliser la figure de **III-A-1-**.

III-B-2-a- J est le milieu de $[AC]$ en effet : $OA = 1$ et $OC = |z_C| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.
Comme $OA = OC$, le triangle OAC est isocèle en O. Or (OJ) est la hauteur issue du sommet principal O. C'est donc aussi la médiane du segment $[AC]$.
Donc J est le milieu de $[AC]$.

III-B-2-b- $z_J = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\qquad$ $|z_J| = \frac{1}{2}$

III-B-2-c- $z_I = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $z_K = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ $\qquad$ $|z_I| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $|z_K| = \frac{1}{2}$

III-B-3- $L_O = \frac{3}{2}$ $\qquad$ en effet : $L_O = |z_I| + |z_J| + |z_K| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

III-C-1- Utiliser la figure de **III-A-1-**.

III-C-2-a- $\mathcal{A}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}ME$

III-C-2-b- Relation liant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$

III-C-2-c- $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}L_M$ $\qquad$ en effet :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}ME + \frac{\sqrt{3}}{2}MF + \frac{\sqrt{3}}{2}MG = \frac{\sqrt{3}}{2}L_M$$

III-C-3- $L_M = \frac{3}{2}$ $\qquad$ en effet : $L_M = L_O$

EXERCICE IV

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,2)$,

- le point C de coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,0)$,

- le point D de coordonnées $(1\,;\,-3\,;\,2)$,

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z + 3 = 0$,

- la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\Delta\ :\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -6 + 5t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}.$$

IV-1- $\mathcal{P}$ et Δ sont sécants en un point E.
Déterminer les coordonnées $(x_E\,;\,y_E\,;\,z_E)$ de E.

IV-2-a- Vérifiez que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

IV-2-b- On note B le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Déterminer les coordonnées $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ du point B. Détailler le calcul.

IV-2-c- Justifier que le point B appartient à la droite Δ.

IV-3-a- Donner les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (CD) d'abscisse 1.

IV-3-b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

IV-3-c- On désigne par H le point de la droite (CD) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (CD).

Déterminer les coordonnées $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ de H. Détailler le calcul.

IV-4- Déterminer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme $ABCD$. Détailler le calcul.

NE RIEN INSCRIRE ICI

REPONSES A L'EXERCICE IV

<table>
<tr><td>IV-1-</td><td>$x_E = -1$ $y_E = -1$ $z_E = 0$ en effet :
$E \in \Delta \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3+2t \\ y_E = -6+5t, \\ z_E = 0 \end{cases}$ et $x_E + 2y_E + z_E + 3 = 0.$
Alors t est solution de $(-3+2t) + 2(-6+5t) - 0 + 3 = 0$
ou encore $12t - 12 = 0$. Et donc $t = 1$.
D'où $x_E = -3 + 2 \times 1 = -1$, $y_E = -6 + 5 \times 1 = -1$ et $z_E = 0$.</td></tr>
<tr><td>IV-2-a-</td><td>la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ en effet :
$C \in \mathcal{P}$ car $C = E$ et $E \in \mathcal{P}$ par définition de E.
$D \in \mathcal{P}$ car $x_D + 2\,y_D + z_D + 3 = 1 + 2 \times (-3) + 2 + 3 = 0$,</td></tr>
<tr><td>IV-2-b-</td><td>$x_B = 1$ $y_B = 4$ $z_B = 0$ en effet :
$ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 3 = -2 \\ y_B - 2 = 2 \\ z_B - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 4 \\ z_B = 0 \end{cases}$.</td></tr>
<tr><td>IV-2-c-</td><td>B appartient à la droite Δ en effet :
$\begin{cases} x_B = -3+2t \\ y_B = -6+5t \\ z_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3+2t \\ 4 = -6+5t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$</td></tr>
<tr><td>IV-3-a-</td><td>$\vec{u}$ $(1\,;\,-1\,;\,1)$</td></tr>
<tr><td>IV-3-b-</td><td>$(CD)\ :\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1-t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>IV-3-c-</td><td>$x_H = 0$ $y_H = -2$ $z_H = 1$ en effet :
$H \in (CD)$ donc $x_H = -1+t$, $y_H = -1-t$ et $z_H = t$
$(AH)\perp(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow 1 \times (x_H - x_A) - 1 \times (y_H - y_A) + 1 \times (z_H - z_A) = 0$
$\Leftrightarrow (t-4) - (-t-3) + (t-2) = 0$
$\Leftrightarrow 3t - 3 = 0$
$\Leftrightarrow t = 1$
D'où $x_H = -1 + 1 = 0$, $y_H = -1 - 1 = -2$, $z_H = 1$</td></tr>
<tr><td>IV-4-</td><td>$\mathcal{A} = \sqrt{312} = 2\sqrt{78}$ en effet :
$(AH) \perp (CD)$ et $H \in (CD)$ donc $\mathcal{A} = CD \times AH$ avec :
$CD = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ car $\overrightarrow{CD}\,(2,-2,2)$,
et $AH = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$ car $\overrightarrow{AH}\,(-3,-4,-1)$.</td></tr>
</table>