ISAT • ESIREM • POLYTECH'Nice-Sophia • POLYTECH'Orléans
EEIGM • ENSGSI • ESSTIN • TELECOM Lille 1 • ISEL

GROUPEMENT D'ÉCOLES D'INGENIEURS PUBLIQUES À PARCOURS INTÉGRÉ

NOM :	**PRENOM :**

Centre d'Examen :	**N° Inscription :**

Epreuves de Mathématiques et de Physique-Chimie
Mercredi 9 mai 2007
9 h - 12 h

SUJET DE MATHEMATIQUES

Ne rien inscrire ci-dessous

1	
2	
3	
4	

TOTAL

Nous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie.

La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.

Il est noté sur 20 points.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

L'usage du téléphone est interdit.

Quatre exercices indépendants sont proposés.

Les démonstrations ne sont à rédiger que si elles sont explicitement demandées.

Le sujet comporte 10 pages numérotées de 2 à 11

EXERCICE I - (7 points)

Donner les réponses de la Partie A de cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{3}$.

Partie A

On étudie dans cette partie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right), \quad \text{pour tout } x > 0$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I-A-1- Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

I-A-2-a- Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

I-A-2-b- Compléter le tableau des variations de f.

I-A-2-c- En déduire que f admet un minimum m que l'on précisera.

I-A-3-a- Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right)$.

I-A-3-b- En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote Δ dont on donnera une équation.

I-A-4-a- Donner l'expression de $f(x) - x$ en fonction de x.

I-A-4-b- Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

I-A-5- Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$, la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie A)

I-A-1- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

I-A-2-a- $f'(x) =$

I-A-2-b-

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

I-A-2-c- $m =$

I-A-3-a- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2} x \right) =$

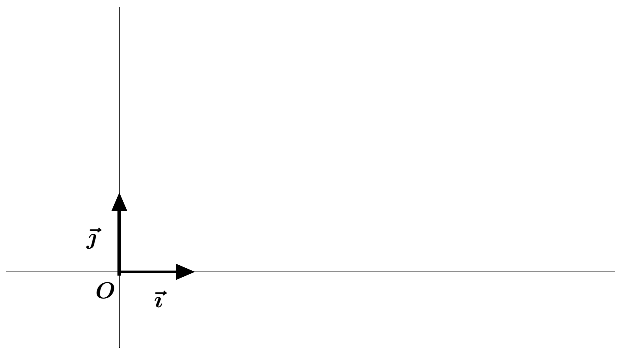
I-A-3-b- Δ :

I-A-4-a- $f(x) - x =$

I-A-4-b-

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
signe de $(f(x) - x)$	

I-5-



EXERCICE I - (suite)

Donner les réponses à la Partie B de cet exercice dans le cadre prévu à la page 5

Partie B

On rappelle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right), \qquad \textbf{pour tout } \mathbf{n} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

I-B-1- En utilisant la **Partie A**, montrer que pour tout entier n, on a :

$$u_n \geq \sqrt{3}$$

I-B-2- En utilisant la **Partie A** et la question **I-B-1-** , expliquer pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

I-B-3-a- Expliquer alors pourquoi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle. On note l cette limite.

I-B-3-b- Justifier que $l = \sqrt{3}$.

REPONSES A L'EXERCICE I (Partie B)

I-B-1-	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{3}$ car
I-B-2-	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car
I-B-3-a-	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l car
I-B-3-b-	$l = \sqrt{3}$ car

EXERCICE II - (4 points)

Donner les réponses de cet exercice dans le cadre prévu à la page 7

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) \ : \quad x^2 + (1 - e^2)\, e^x\, x - e^{2+2x} = 0$$

II-A-1-a- Mettre e^{2x} en facteur dans le membre de gauche de l'équation (E).

II-A-1-b- Déterminer l'expression de X en fonction de x pour que l'équation (E) soit équivalente à l'équation (E') suivante :

$$(E') \ : \quad X^2 + (1 - e^2)\, X - e^2 = 0$$

II-A-2-a- Déterminer le réel b pour que l'on ait :

$$(1 - e^2)^2 + 4\, e^2 = (1 + b)^2$$

II-A-2-b- Déterminer alors les deux solutions réelles X_1 et X_2 de l'équation (E').

II-A-3- En déduire que x est une solution de (E) si et seulement si x vérifie une des équations :

$$x = -\, e^{g(x)} \qquad \text{ou} \qquad x = e^{h(x)}$$

où g et h sont des fonctions que l'on déterminera. Justifier la réponse.

II-A-4- On considère dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = e^x$.

II-A-4-a- Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = -e^x$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

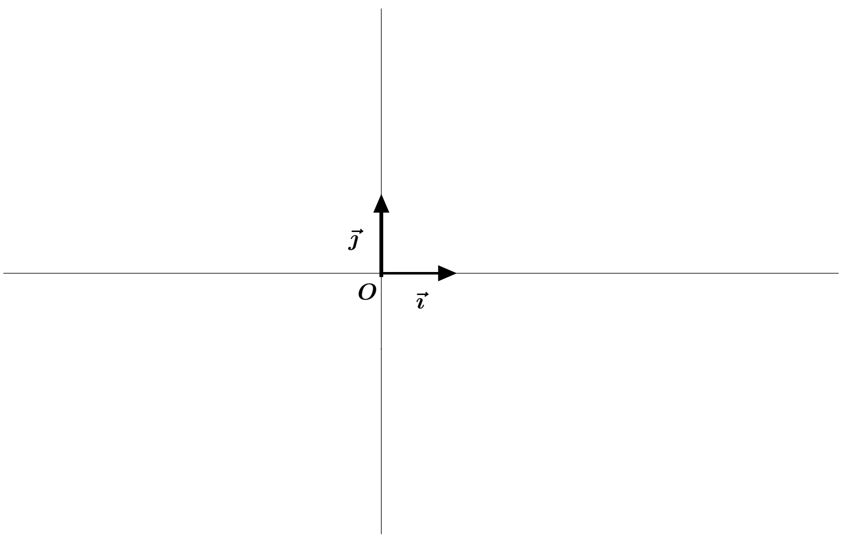
II-A-4-b- Par quelle transformation géométrique simple la courbe $\mathcal{C}_3$ d'équation $y = e^{2+x}$ se déduit-elle de $\mathcal{C}_1$?

II-A-4-c- Tracer l'allure des courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

II-A-5- Déterminer graphiquement, à l'aide de la question **II-A-4-c-**, le nombre de solutions de l'équation (E). Justifier la réponse.

REPONSES A L'EXERCICE II

II-A-1-a-	(E) : $e^{2x}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big) = 0$
II-A-1-b-	$X =$
II-A-2-a-	$b =$
II-A-2-b-	$X_1 =$ $\qquad\qquad$ $X_2 =$
II-A-3-	$g(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$ car
II-A-4-a-	$\mathcal{C}_2$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par
II-A-4-b-	$\mathcal{C}_3$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par
II-A-4-c-	
II-A-5-	Nombre de solutions de (E) : $\qquad$ car



EXERCICE III - (5 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et F d'affixe respective :

$$z_A = 4 + 4i\,, \qquad z_B = 4\,, \qquad z_C = 7\,, \qquad z_F = 4 + 3i.$$

On désigne par E le point d'intersection des droites (AC) et (OF).

Partie A

III-A-1- Faire une figure complète.

III-A-2-a- Calculer $\dfrac{z_F}{z_A - z_C}$ sous forme algébrique.

III-A-2-b- Que peut-on déduire de la question **III-A-2-a-**, pour les droites (OF) et (AC). Justifier la réponse.

III-A-3- On veut vérifier que le point F est le barycentre du système de points pondérés $\left\{(0\,;\,3)\,,(A\,;\,\alpha)\,,(C\,;\,25-\alpha)\right\}$, où α est un réel.

III-A-3-a- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OF}$ en fonction de α, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.

III-A-3-b- Déterminer la valeur de α.

III-A-4- Le point E d'intersection des droites (AC) et (OF) est barycentre du système $\{(A\,;\,\beta)\,,(C\,;\,4)\}$. Déterminer la valeur de β.

Partie B

On considère les cercles suivants :

- Le cercle C_1, circonscrit au triangle BOF, de centre Ω_1 et de rayon r_1.
- Le cercle C_2, circonscrit au triangle OEC, de centre Ω_2 et de rayon r_2.
- Le cercle C_3, circonscrit au triangle ABC, de centre Ω_3 et de rayon r_3.
- Le cercle C_4, circonscrit au triangle AEF, de centre Ω_4 et de rayon r_4.

III-B-1- Donner les affixes z_1, z_2, z_3 et z_4 des points Ω_1, Ω_2, Ω_3 et Ω_4.

Calculer r_1, r_2 r_3 et r_4.

III-B-2- Calculer $z_3 - z_4$ et $z_2 - z_1$ sous forme algébrique.

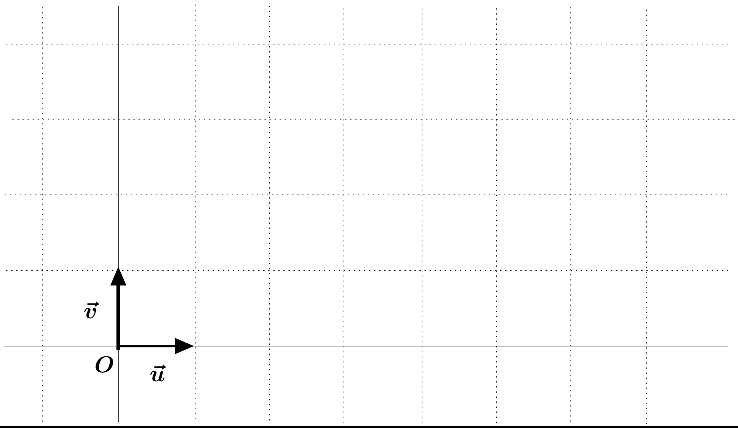
Que peut-t-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

III-B-3- Calculer $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ sous forme algébrique.

Que peut-t-on en déduire pour le quadrilatère $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$?

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE III

III-A-1-	
III-A-2-a-	$\dfrac{z_F}{z_A - z_C} =$
III-A-2-b-	(OF) et (AC) sont car
III-A-3-a-	$\overrightarrow{OF} =$
III-A-3-b-	$\alpha =$
III-A-4-	$\beta =$
III-B-1-	$z_1 =$ $\quad$ $z_2 =$ $\quad$ $z_3 =$ $\quad$ $z_4 =$ $r_1 =$ $\quad$ $r_2 =$ $\quad$ $r_3 =$ $\quad$ $r_4 =$
III-B-2-	$z_3 - z_4 =$ $\quad$ $z_2 - z_1 =$ $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ est
III-B-3-	$\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} =$ $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ est

EXERCICE IV (4 points)

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 11

On se propose de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) \ : \quad f'(x) \,-\, 3\,f(x) \,=\, \frac{3}{1\,+\,e^{-3\,x}}$$

et qui vérifient : $\quad f(0) \,=\, 0$.

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On désigne par f' sa dérivée.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) \,=\, e^{-3\,x}\,f(x)$$

On désigne par h' la dérivée de h.

IV-1-a- Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$, pour tout réel x.

IV-1-b- Expliquer pourquoi la dérivée h' de h vérifie, pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{3\,e^{-3\,x}}{1\,+\,e^{-3\,x}}.$$

IV-2- Déterminer alors toutes les fonctions h possibles. On justifiera la réponse.

IV-3- En déduire toutes les fonctions f solutions de $(\mathcal{E})$.

IV-4- Déterminer la fonction f_0, solution de $(\mathcal{E})$, qui vérifie $f_0(0) = 0$.

NE RIEN ECRIRE DANS LA PARTIE BARREE

REPONSES A L'EXERCICE IV

IV-1-a-	$h'(x) =$
IV-1-b-	$h'(x) = \dfrac{3\,e^{-3\,x}}{1\,+\,e^{-3\,x}}$ car
IV-2-	$h(x) \,=$ car
IV-3-	$f(x) \,=$
IV-4-	$f_0(x) \,=$