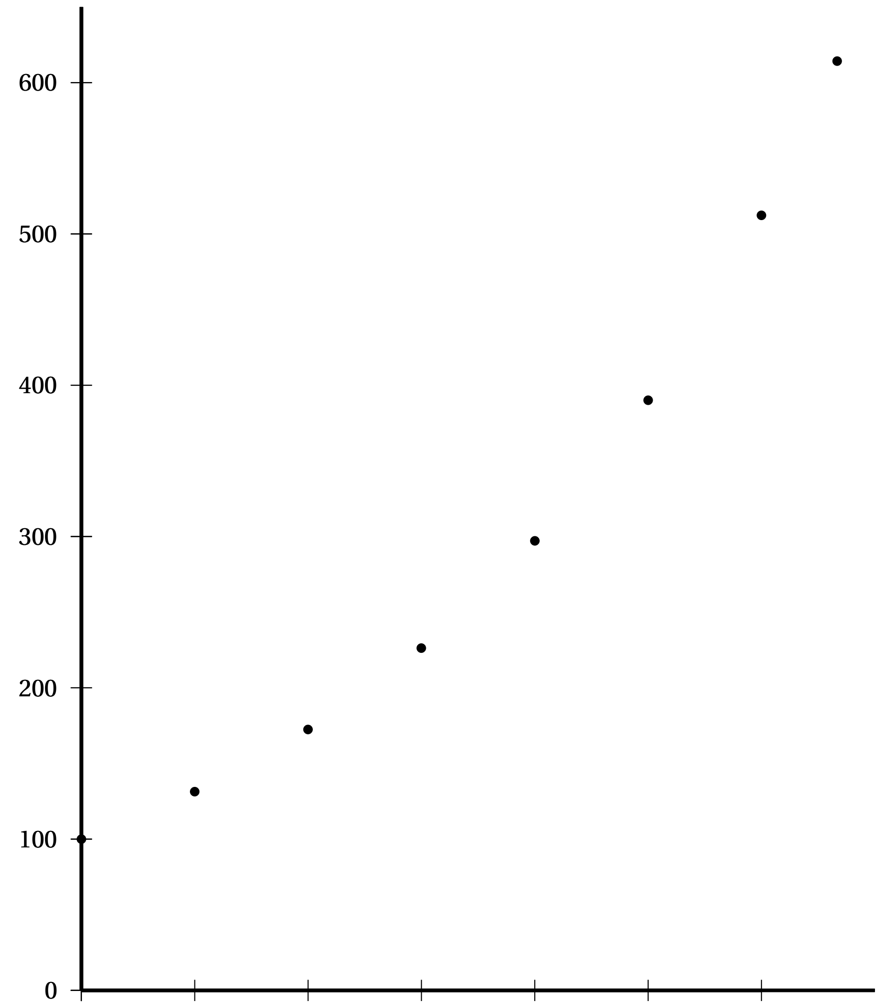
∾ Corrigé du baccalauréat ES Polynésie ∾ 13 septembre 2012

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On veut étudier l'évolution de l'indice du PIB y en fonction du rang de l'année x.

1. a.



b. Les points ne sont pas alignés. Un ajustement affine n'est pas approprié.

2.

Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	3	6	9	12	15	18	20
$z_i = \ln y_i$, $1 \leqslant i \leqslant 8$	4,61	4,88	5,15	5,42	5,69	5,97	6,24	6,42

3. La calculatrice donne : $y = 0,09x + 4,61$.

4. 2012 correspond au rang 27. Donc $z = \ln y = 0,09 \times 27 + 4,61 \approx 7,04 \iff y = \mathrm{e}^{7,04} \approx 1\,141,39$.

5. On a $z = \ln y = 0,09x + 4,61$ avec $y > 0$; donc $y = \mathrm{e}^{0,09x+4,61} = \mathrm{e}^{0,09x} \times \mathrm{e}^{4,61}$; or $\mathrm{e}^{4,61} \approx 100,48$.

Finalement $y \approx 100,48\mathrm{e}^{0,09x}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

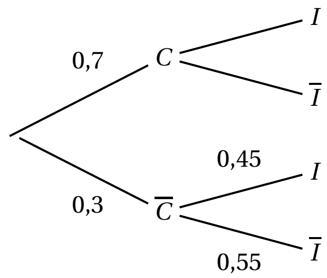
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A

1. Le pourcentage de feuillus dans la récolte totale est égal à :
$\dfrac{11\,489}{33\,097} \times 100 \approx 35\,\%$.
2. Le pourcentage de bois destiné à l'industrie parmi les conifères est égal à :
$\dfrac{6\,805}{21\,608} \times 100 \approx 31\,\%$.

PARTIE B

1.

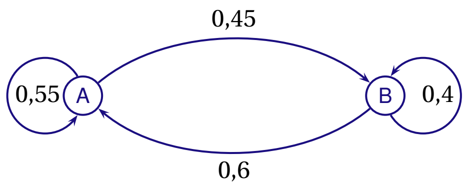


La probabilité qu'un lot pris au hasard soit destiné au bois d'œuvre est de $0,585$.

2. D'après la loi des probabilités totales, on a :
$p\left(\overline{I}\right) = p\left(C \cap \overline{I}\right) + p\left(\overline{C}cap\overline{I}\right) \iff 0,585 = p\left(C \cap \overline{I}\right) + 0,3 \times 0,55 \iff p\left(C \cap \overline{I}\right) = 0,585 - 0,165 = 0,42$.
Or $p\left(C \cap \overline{I}\right) = p(C) \times p_C\left(\overline{I}\right) \iff 0,42 = 0,7 \times p_C\left(\overline{I}\right) \iff p_C\left(\overline{I}\right) = \dfrac{0,42}{0,7} = 0,6$.
On a donc $p_C(I) = 1 - p_C\left(\overline{I}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$.
Enfin $p(I \cap C) = p(C) \times p_C(I) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.
3. Il faut trouver $p_I(C) = \dfrac{p(I \cap C}{p(I)}$.
Or $p(I) = p(C \cap I) + p\left(\overline{C} \cap I\right) = 0,28 + 0,135 = 0,415$.
Donc $p_I(C) = \dfrac{p(I \cap C)}{p(I)} = \dfrac{0,28}{0,415} \approx 0,675$.
4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0,585$.
L'évènement contraire de « il y a au moins un lot constitué de bois d'œuvre » est l'évènement « aucun lot ne contient du bois d'œuvre », dont la probabilité est $0,415^4$. La probabilité cherchée est donc égale à :
$1 - 0,415^4 \approx 0,970$.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** En posant A_n l'évènement « l'habitant vient faire ses courses à Commerce Plus la semaine n » et B_n l'évènement « l'habitant ne vient pas faire ses courses à Commerce Plus la semaine n », on a :
$p_{A_n}((A_{n+1}) = 0,55$; $p_{A_n}((B_{n+1}) = 0,45$;
$p_{B_n}((A_{n+1}) = 0,6$; $p_{B_n}((B_{n+1}) = 0,4$.
On a donc le graphe probabiliste suivant :



La matrice M vérifiant $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n\end{pmatrix} \times \text{M}$ est la matrice $\text{M} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.

2. a. $P_2 = P_1 \times \text{M} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,44\end{pmatrix}$.

De même $P_3 = P_2 \times \text{M} = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,44\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,572 & 0,428\end{pmatrix}$.

b. La dernier résultat signifie que 57,2 % des habitants vont aller à Commerce Plus la troisième semaine.

3. a. Les termes de la matrice de transition M étant non nuls, donc P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}$ (avec $x + y = 1$) ne dépendant pas de l'état initial. Cette matrice P vérifie :

$P = P \times \text{M}$ d'où le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,55x + 0,6y \\ y & = & 0,45x + 0,4y \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,45x - 0,6y & = & 0 \\ -0,45x + 0,6y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,45x - 0,6y & = & 0 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,45x - 0,6y & = & 0 \\ y & = & 1-x \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,45x - 0,6(1-x) & = & 0 \\ y & = & 1-x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1,05x - 0,6 & = & 0 \\ y & = & 1-x \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{0,6}{1,05} \\ y & = & 1-x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{4}{7} \\ y & = & 1-x \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{4}{7} \\ y & = & \frac{3}{7} \end{array}\right. \quad \text{Donc } P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

b. Le dernier résultat montre qu'à terme sur 7 clients éventuels 4 iront faire leurs courses à Commerce Plus. Ce résultat est déjà pratiquement atteint la troisième semaine, car $\dfrac{4}{7} \approx 0,5714 \approx 0,572$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. f est la somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,6]$ et sur cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{2x}{2} + \dfrac{4}{x} = x + \dfrac{4}{x} > 0$ car somme de deux termes supérieurs à zéro. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1\,;\,6]$.

2. a. $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x} = \dfrac{\frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5,6}{x} = \dfrac{x}{2} + 4\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{5,6}{x}$.

b. On a $C'_M(x) = \dfrac{1}{2} + 4\dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - \dfrac{5,6}{x^2} = \dfrac{1}{2} + 4\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right) - \dfrac{5,6}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{-1,6 - 4\ln x}{x^2}\right) = \dfrac{x^2 - 3,2 - 8\ln x}{2x^2}$.

3. a. $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x} = \dfrac{2(x+2)(x-2)}{x}$.

Les trois termes : 2, , $x+2$, x sont supérieurs à zéro sur $[1\,;\,6]$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 2$, d'où positif pour $x \geqslant 2$ et négatif ailleurs.

Conclusion : f est décroissante sur [1 ; 2] puis croissante sur [2 ; 6].

On a par ailleurs $f(1) = -2,2$; $f(2) = 0,8 - 8\ln 2 \approx -4,75$ et $f(6) = 32,8 - 8\ln 6 \approx 18,5$.

b. Sur l'intervalle [2 ; 6], la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $-4,75$ à 18,5 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel unique α de l'intervalle [2 ; 6] tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $f(3) \approx -2,99$ et $f(4) \approx 1,7$, donc $3 < \alpha < 4$, puis $f(3,6) \approx -0,49$ et $f(3,7) \approx 0,02$, d'où $3,6 < \alpha < 3,7$ et enfin $(3,69) \approx -0,03$ et $f(3,70) \approx 0,02$, d'où $3,69 < \alpha < 3,70$.

Au dixième près $\alpha \approx 3,7$.

c. Les variations de f montrent que $f(x) \leqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$ et $f(x) \geqslant 0]$ sur $[\alpha\ ;\ 6]$.

4. a. On a vu que $C'_M(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ et comme $2x^2 > 0$ sur [1 ; 6], le signe de $C'_M(x)$ est celui de $f(x)$, donc d'après la question précédente :

$C'_M(x) < 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$, soit C_M est décroissante sur cet intervalle et

$C'_M(x) > 0$ sur $[\alpha\ ;\ 6]$, soit C_M est croissante sur cet intervalle.

D'où le tableau de variation suivant :

x	1		$\alpha \approx 3,7$		6
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$	6,1	$\searrow$	$\approx 4,78$	$\nearrow$	$\approx 5,13$

b. Le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit est d'après le tableau $C_M(\alpha) \approx 4,78$, soit environ 4 780 €.

5. On a vu que la fonction C_T est croissante sur [1 ; 6] : le coût maximal est donc $C_T(6) = 18 + 4\ln 6 + 5,6 \approx 30,77$, soit environ 30 770 €.

Pour ne pas perdre d'argent il faut récupérer ces 30 770 €avec une vente minimale de $x = 1$, soit 30,77 € le mètre cube.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Question 1 :

Graphiquement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Question 2 :

Graphiquement : la fonction décroit à partir de $x = 3$: $f'(x) < 0$ sur $]3\ ;\ 7]$.

Question 3 : Pour un accroissement de 3 en ordonnées l'accroissement de l'abscisse est de 2 : le coefficient directeur est donc égal à $\dfrac{3}{2} = 1,5$.

L'ordonnée à l'origine est égal à -1, donc l'équation est $y = 1,5x - 1$.

Question 4 :

L'intégrale existe, est égale à l'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$. On voit que cette aire est inférieur e à celle du rectangle de longueur 2 et de largeur 0,5, donc inférieure à 1. Réponse : $0,5 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1,5$.

Partie B

$$g(x) = (-2x-2)\times \mathrm{e}^{-0,5x}$$

1. g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc :
$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,5x} - 0,5(-2x-2)\times \mathrm{e}^{-0,5x} = \mathrm{e}^{-0,5x}(-2+x+1) = (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$
2. On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x} >$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $(x-1)$, donc négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$.
La fonction g est donc décroissante pour $x < 1$ et croissante pour $x > 1$. Elle a donc un minimum pour $x = 1$, $g(1) = -4\mathrm{e}^{-0,5} \approx -2,426$.
3. On a $g(x) = -2x\mathrm{e}^{-0,5x} - 2\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$, donc par somme de limites
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de g au voisinage de plus l'infini.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-2x-2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-0,5x} = +\infty$, d'où par produit de limites :
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
4. Voir plus bas.
5. On lit graphiquement $-1 < x_I < 0$ et $-2 < y_I < -1$.
6. On a donc $g'(x) = f(x) \iff (x-1)\mathrm{e}^{-0,5x} = (-2x-2)\times\mathrm{e}^{-0,5x} \iff x-1 = -2x-2$ (car $\mathrm{e}^{-0,5x} \neq 0$) $\iff 3x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{3}$.
L'ordonnée de I est donc : $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}-1\right)\mathrm{e}^{\frac{0,5}{3}} = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.
7. La valeur moyenne de f sur $[0 ; 1]$ est :
$V_m = \dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = g(1)-g(0)$, car g est une primitive de f.
$V_m = (-2-2)\times\mathrm{e}^{-0,5} - \left((-2)\times\mathrm{e}^{0}\right) = -4\mathrm{e}^{-0,5}+2 = 2-4\mathrm{e}^{-0,5} \approx -0,43$. (une valeur négative est normale puisque sur l'intervalle $[0 ; 1]$, on $f(x) \leqslant 0$.)

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

Exercice 4