A. P. M. E. P.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 17 novembre 2016

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1.$$

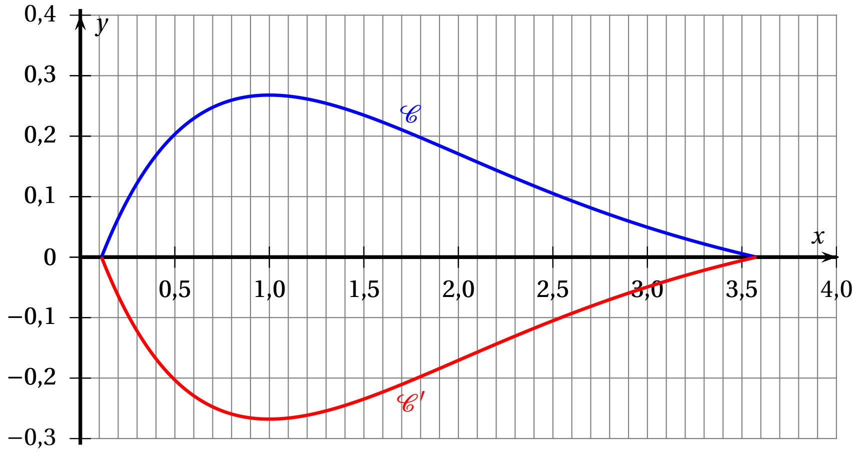
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. **a.** Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre $P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

   b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer $P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.
2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

   a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

   b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.
4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est $0,988$.
   On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   a. Déterminer la forme exponentielle de a.

   b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

   a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.

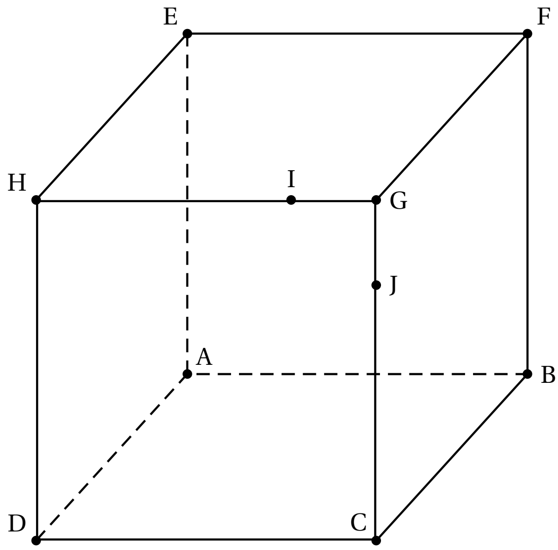
   b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{\text{HI}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{HG}}$ et $\overrightarrow{\text{JG}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{CG}}$.



1. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.

   Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n)en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats avant suivi l'enseignement de spécialité

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

   b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.
   En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour tout entier naturel n, on admet que

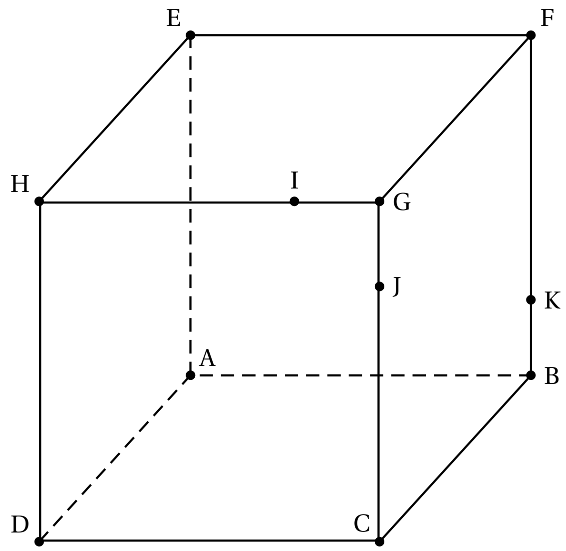
   $$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10$^{\text{e}}$ jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 2