

Pour $x < -1$, $f''(x) > 0$, donc f' est croissante et pour $x > -1$, $f''(x) < 0$, donc f' est décroissante. La fonction f' admet donc un maximum en $x = -1$. Réponse **d**.

3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

Si F est une primitive de f sur \mathbb{R} ,

a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$

b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$

c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$

d. $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$

4. Que vaut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

a. -1

b. 1

c. $+\infty$

d. n'existe pas

5. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x+1}$.

La seule primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a. $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$

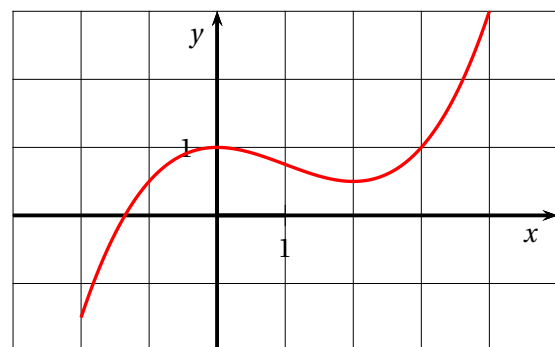
b. $x \mapsto 2e^{2x+1} - e$

c. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$

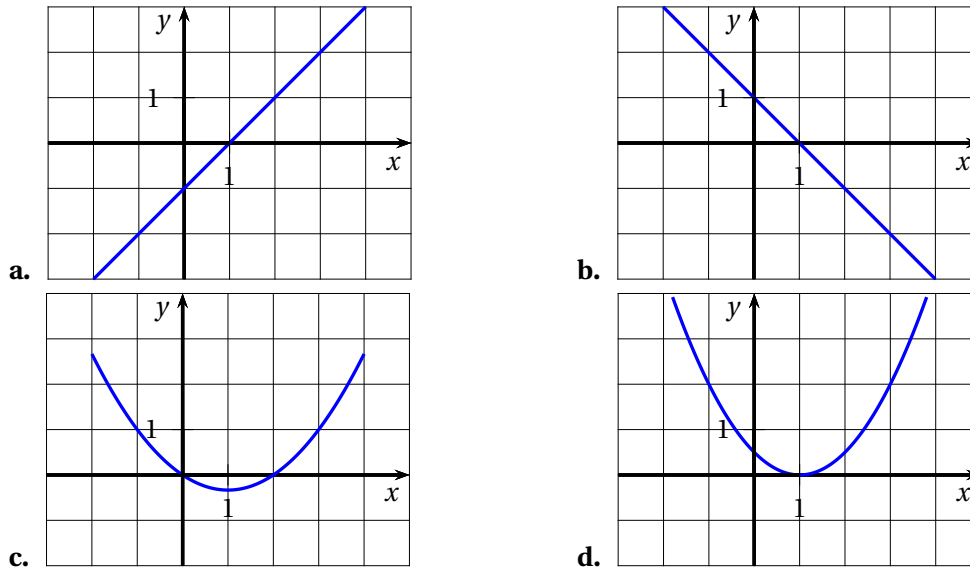
d. $x \mapsto e^{x^2+x}$

6.

Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2; 4]$



Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'' , dérivée seconde de f ?

**EXERCICE 2 7 points****Thèmes : Fonction logarithme et suite**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. a. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0; +\infty[$ et les limites.
- c. Justifier que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) \in]0; 1[$.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
- b. Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 3 7 points**Thème : Géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(3; -2; 2), \quad B(6; 1; 5), \quad C(6; -2; -1) \quad \text{et} \quad D(0; 4; -1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times h$$

où \mathcal{A} est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
 - b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
 - c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5; 0; 1).
 - a. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$.
 - b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
 - c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

EXERCICE 4 7 points**Thème : Probabilités**

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
 - a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
 - b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
 - a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
 - b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

- c.** En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
 - d.** Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal?
- 3.** On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).
- Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros?