Corrigé de l'exercice 1

Panorama déterminant 4x4 - Corrigé détaillé

►1. A) Facile - M1 Triangulaire / quasi triangulaire Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode : triangulaire / quasi triangulaire.

$\det(A) = 4 \times 4 \times -1 \times -2 = 32$

$\det(A) = \boxed{32}$

►2. B) Moins facile - M2 Laplace favorable Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode : Laplace sur la première ligne (deux coefficients non nuls).

$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(M_{1,1}) + (-1)^{1+3} a_{1,3} \det(M_{1,3})$

$\det(A) = (-2) \det(M_{1,1}) + (-3) \det(M_{1,3})$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{1,1}) = (-4) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - (0) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (0) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (0)(-2) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1) - (0)(2) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (2)(-2) - (1)(2) = -6$$

$\det(M_{1,1}) = (-4)(1) - (0)(2) + (0)(-6) = -4$

$$\det(M_{1,3}) = (0) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (-4) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (0) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1) - (0)(2) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1) - (0)(-1) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (2)(2) - (2)(-1) = 6$$

$\det(M_{1,3}) = (0)(2) - (-4)(2) + (0)(6) = 8$

$\det(A) = (-2) \times (-4) + (-3) \times (8) = -16$

$\det(A) = \boxed{-16}$

▶3. C) Difficile - M3 Matrice par blocs Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode : matrice bloc triangulaire de la forme $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = (4)(-4) - (-3)(-4) = -28$

$\det(D) = (-1)(3) - (-1)(-4) = -7$

$\det(A) = \det(B) \times \det(D) = (-28) \times (-7) = 196$

$\det(A) = \boxed{196}$

▶4. D) Plus difficile - M4 Opérations élémentaires guidées Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Méthode : opérations élémentaires avec suivi de l'impact sur le déterminant.
On applique successivement $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$, puis $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$, puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ pour obtenir une matrice triangulaire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = \det(A), \qquad \det(A_2) = \dfrac{1}{2}\det(A_1) = \dfrac{1}{2}\det(A)$

$\det(T) = -\det(A_2) = -\dfrac{1}{2}\det(A) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = -2\det(T)$

$\det(T) = 3 \times -1 \times 1 \times -3 = 9$

$\det(A) = -2 \times (9) = -18$

$\det(A) = \boxed{-18}$

▶**5. E) Matrice dense - simplification par opérations** Soit a calculer $\det(A)$.

Etape 1. Rappel de la matrice de départ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Choix des opérations pour faire apparaître une structure triangulaire.

On applique successivement $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$

Rappel des effets sur le déterminant : $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe ; $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ ne change pas le déterminant ; $L_i \leftarrow kL_i$ multiplie le déterminant par k.

Etape 3. Application des opérations (matrices intermédiaires).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = \det(A), \qquad \det(A_2) = \det(A_1), \qquad \det(A_3) = \det(A_2)$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire.

$$T = A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant sur la triangulaire.

$$\det(T) = -1 \times 1 \times -2 \times 4 = 8$$

$$\det(A) = \det(A_3) = \det(T) = 8$$

Etape 6. Conclusion.

$$\det(A) = \boxed{8}$$

►6. F) Matrice dense complexe - lignes, colonnes et facteur Soit a calculer $\det(A)$.
Etape 1. Rappel de la matrice initiale.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 & -2 \\ -8 & -6 & 2 & -6 \\ 12 & 8 & 1 & 6 \\ -18 & -11 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Stratégie : créer des zéros en combinant opérations de lignes et de colonnes.
Etape 3. Application des opérations et suivi de l'effet sur le déterminant.

Operation 1 : $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est multiplié par 1/2. $\quad (F = \frac{1}{2})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ -8 & -6 & 2 & -6 \\ 12 & 8 & 1 & 6 \\ -18 & -11 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Operation 2 : $C_2 \leftrightarrow C_4 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant change de signe. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ -8 & -6 & 2 & -6 \\ 12 & 6 & 1 & 8 \\ -18 & -6 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

Operation 3 : $C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -8 & -6 & -4 & -6 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ -18 & -6 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Operation 4 : $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -4 & -6 \\ -4 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & -6 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

Operation 5 : $L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -4 & -6 \\ -4 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 6 : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 7 : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire (ou quasi triangulaire exploitable).

$$T = A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant de la matrice finale.

$$\det(T) = 2 \times -4 \times 3 \times -3 = 72$$

Etape 6. Ajustement avec le facteur accumulé et conclusion.

$$\det(T) = F\det(A_0), \quad F = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \det(A_0) = \frac{\det(T)}{F}$$

$$\det(A) = \frac{72}{\frac{-1}{2}} = -144$$

$$\det(A) = \boxed{-144}$$