Corrigé de l'exercice 1

Panorama déterminant 4x4 - Corrigé détaillé

►1. A) Facile - M1 Triangulaire / quasi triangulaire Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode : triangulaire / quasi triangulaire.

$$\det(A) = 2 \times 4 \times -4 \times -1 = 32$$

$$\det(A) = \boxed{32}$$

►2. B) Moins facile - M2 Laplace favorable Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode : Laplace sur la première ligne (deux coefficients non nuls).

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(M_{1,1}) + (-1)^{1+3} a_{1,3} \det(M_{1,3})$$

$$\det(A) = (-3)\det(M_{1,1}) + (-1)\det(M_{1,3})$$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{1,1}) = (-1)\det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (0)\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (0)\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-3)(1)-(0)(1) = -3, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1)-(0)(-1) = 2, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1)-(-3)(-1) =$$

$$\det(M_{1,1}) = (-1)(-3) - (0)(2) + (0)(-1) = 3$$

$$\det(M_{1,3}) = (0)\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (0)\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1)-(0)(-1) = 2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2)(1)-(0)(0) = -2, \quad \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2)(-1)-(2)(0) =$$

$$\det(M_{1,3}) = (0)(2) - (-1)(-2) + (0)(2) = -2$$

$$\det(A) = (-3) \times (3) + (-1) \times (-2) = -7$$

$$\det(A) = \boxed{-7}$$

▶3. C) Difficile - M3 Matrice par blocs Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode : matrice bloc triangulaire de la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = (1)(2) - (-1)(2) = 4$

$\det(D) = (-1)(3) - (-3)(2) = 3$

$\det(A) = \det(B) \times \det(D) = (4) \times (3) = 12$

$\det(A) = \boxed{12}$

▶4. D) Plus difficile - M4 Opérations élémentaires guidées Soit à calculer $\det(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode : opérations élémentaires avec suivi de l'impact sur le déterminant.
On applique successivement $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, puis $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$, puis $L_2 \leftrightarrow L_3$ pour obtenir une matrice triangulaire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = \det(A), \qquad \det(A_2) = \frac{1}{2}\det(A_1) = \frac{1}{2}\det(A)$$

$$\det(T) = -\det(A_2) = -\frac{1}{2}\det(A) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = -2\det(T)$$

$\det(T) = 3 \times -1 \times 1 \times 1 = -3$

$\det(A) = -2 \times (-3) = 6$

$\det(A) = \boxed{6}$

▶5. E) Matrice dense - simplification par opérations Soit a calculer $\det(A)$.

Etape 1. Rappel de la matrice de départ.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 10 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Choix des opérations pour faire apparaître une structure triangulaire.

On applique successivement $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$

Rappel des effets sur le déterminant : $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe ; $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ ne change pas le déterminant ; $L_i \leftarrow kL_i$ multiplie le déterminant par k.

Etape 3. Application des opérations (matrices intermédiaires).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = \det(A), \qquad \det(A_2) = \det(A_1), \qquad \det(A_3) = \det(A_2)$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire.

$$T = A_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant sur la triangulaire.

$$\det(T) = -5 \times 3 \times -2 \times 4 = 120$$

$$\det(A) = \det(A_3) = \det(T) = 120$$

Etape 6. Conclusion.

$$\det(A) = \boxed{120}$$

▶**6. F) Matrice dense complexe - lignes, colonnes et facteur** Soit a calculer $\det(A)$.

Etape 1. Rappel de la matrice initiale.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 10 & -3 \\ -7 & 2 & -9 & 3 \\ 20 & -7 & 18 & -6 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Stratégie : créer des zéros en combinant opérations de lignes et de colonnes.

Etape 3. Application des opérations et suivi de l'effet sur le déterminant.

Operation 1 : $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est multiplié par 1/2. $\quad (F = \frac{1}{2})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 10 & -3 \\ -7 & 2 & -9 & 3 \\ 20 & -7 & 18 & -6 \end{pmatrix}$$

Operation 2 : $C_2 \leftrightarrow C_4 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant change de signe. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 10 & 0 \\ -7 & 3 & -9 & 2 \\ 20 & -6 & 18 & -7 \end{pmatrix}$$

Operation 3 : $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & -3 & 2 \\ 20 & -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Operation 4 : $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_4 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Operation 5 : $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 6 : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 7 : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \Rightarrow \quad$ Le déterminant est inchangé. $\quad (F = \frac{-1}{2})$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire (ou quasi triangulaire exploitable).

$$T = A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant de la matrice finale.

$$\det(T) = 3 \times -2 \times 1 \times -3 = 18$$

Etape 6. Ajustement avec le facteur accumulé et conclusion.

$$\det(T) = F \det(A_0), \quad F = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \det(A_0) = \frac{\det(T)}{F}$$

$$\det(A) = \frac{18}{\frac{-1}{2}} = -36$$

$$\det(A) = \boxed{-36}$$