

**Corrigé de l'exercice 1****Panorama déterminant 4x4 - Corrigé détaillé**

►1. A) Facile - M1 Triangulaire / quasi triangulaire Soit à calculer  $\det(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode : triangulaire / quasi triangulaire.

On applique  $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$  pour retrouver une matrice triangulaire. Cette opération est du type  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ , donc le déterminant est inchangé.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A') = -1 \times 4 \times 3 \times -1 = 12$$

$$\det(A) = \boxed{12}$$

►2. B) Moins facile - M2 Laplace favorable Soit à calculer  $\det(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode : Laplace sur la première ligne (deux coefficients non nuls).

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det(M_{1,1}) + (-1)^{1+3} a_{1,3} \det(M_{1,3})$$

$$\det(A) = (-1) \det(M_{1,1}) + (2) \det(M_{1,3})$$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{1,1}) = (-1) \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} - (0) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + (0) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (3)(-2) - (0)(-2) = -6, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1)(-2) - (0)(2) = -2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1)(-2) - (3)(2)$$

$$\det(M_{1,1}) = (-1)(-6) - (0)(-2) + (0)(-8) = 6$$

$$\det(M_{1,3}) = (0) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + (0) \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1)(-2) - (0)(2) = -2, \quad \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (-2)(-2) - (0)(2) = 4, \quad \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (-2)(2) - (1)(2) = -6$$

$$\det(M_{1,3}) = (0)(-2) - (-1)(4) + (0)(-6) = 4$$

$$\det(A) = (-1) \times (6) + (2) \times (4) = 2$$

$$\det(A) = \boxed{2}$$

►3. C) Difficile - M3 Matrice par blocs Soit à calculer  $\det(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Méthode : matrice bloc triangulaire de la forme  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ .

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = (-4)(-2) - (-2)(1) = 10$$

$$\det(D) = (-1)(-4) - (-2)(2) = 8$$

$$\det(A) = \det(B) \times \det(D) = (10) \times (8) = 80$$

$$\det(A) = \boxed{80}$$

►4. D) Plus difficile - M4 Opérations élémentaires guidées Soit à calculer  $\det(A)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Méthode : opérations élémentaires avec suivi de l'impact sur le déterminant.

On applique successivement  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ , puis  $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$ , puis  $L_2 \leftrightarrow L_3$  pour obtenir une matrice triangulaire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = \det(A), \quad \det(A_2) = \frac{1}{2} \det(A_1) = \frac{1}{2} \det(A)$$

$$\det(T) = -\det(A_2) = -\frac{1}{2} \det(A) \implies \det(A) = -2 \det(T)$$

$$\det(T) = 1 \times 3 \times -1 \times -2 = 6$$

$$\det(A) = -2 \times (6) = -12$$

$$\det(A) = \boxed{-12}$$

►5. E) Matrice dense - simplification par opérations Soit a calculer  $\det(A)$ .

Etape 1. Rappel de la matrice de départ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Choix des opérations pour faire apparaître une structure triangulaire.

On applique successivement  $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ .

Rappel des effets sur le déterminant :  $L_i \leftrightarrow L_j$  change le signe;  $L_i \leftarrow L_i + kL_j$  ne change pas le déterminant;  $L_i \leftarrow kL_i$  multiplie le déterminant par  $k$ .

Etape 3. Application des opérations (matrices intermédiaires).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = \det(A), \quad \det(A_2) = \det(A_1), \quad \det(A_3) = \det(A_2)$$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire.

$$T = A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant sur la triangulaire.

$$\det(T) = -1 \times 1 \times 5 \times 2 = -10$$

$$\det(A) = \det(A_3) = \det(T) = -10$$

Etape 6. Conclusion.

$$\det(A) = \boxed{-10}$$

►6. F) Matrice dense complexe - lignes, colonnes et facteur Soit a calculer  $\det(A)$ .

Etape 1. Rappel de la matrice initiale.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 4 \\ -5 & -3 & 10 & -6 \\ -1 & -1 & 12 & -6 \\ -8 & -5 & 24 & -12 \end{pmatrix}$$

Etape 2. Stratégie : créer des zéros en combinant opérations de lignes et de colonnes.

Etape 3. Application des opérations et suivi de l'effet sur le déterminant.

Operation 1 :  $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \Rightarrow$  Le déterminant est multiplié par  $1/2$ . ( $F = \frac{1}{2}$ )

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -5 & -3 & 10 & -6 \\ -1 & -1 & 12 & -6 \\ -8 & -5 & 24 & -12 \end{pmatrix}$$

Operation 2 :  $C_2 \leftrightarrow C_4 \Rightarrow$  Le déterminant change de signe. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -5 & -6 & 10 & -3 \\ -1 & -6 & 12 & -1 \\ -8 & -12 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

Operation 3 :  $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \Rightarrow$  Le déterminant est inchangé. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -6 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ -8 & -12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Operation 4 :  $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4 \Rightarrow$  Le déterminant est inchangé. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -2 & -3 \\ 1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Operation 5 :  $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \Rightarrow$  Le déterminant est inchangé. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -2 & -3 \\ 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 6 :  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow$  Le déterminant est inchangé. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Operation 7 :  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \Rightarrow$  Le déterminant est inchangé. ( $F = \frac{-1}{2}$ )

$$A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 4. La matrice obtenue est triangulaire (ou quasi triangulaire exploitable).

$$T = A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Etape 5. Calcul du déterminant de la matrice finale.

$$\det(T) = -1 \times -4 \times 2 \times -3 = -24$$

Etape 6. Ajustement avec le facteur accumulé et conclusion.

$$\det(T) = F \det(A_0), \quad F = \frac{-1}{2} \implies \det(A_0) = \frac{\det(T)}{F}$$

$$\det(A) = \frac{-24}{\frac{-1}{2}} = 48$$

$$\det(A) = \boxed{48}$$