Corrigé de l'exercice 1

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}65\,x + 0{,}9\,y & 0{,}35\,x + 0{,}1\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}65\,x + 0{,}9\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}65\,x + 0{,}9\,(1 - x) \\ x &= 0{,}65\,x + 0{,}9 - 0{,}9\,x \\ x - 0{,}65\,x + 0{,}9\,x &= 0{,}9 \\ (1 - 0{,}65 + 0{,}9)\,x &= 0{,}9 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}9 \\ x &= \frac{0{,}9}{1{,}25} \\ x &= 0{,}72 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}28 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}15\,x + 0{,}4\,y & 0{,}85\,x + 0{,}6\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}15\,x + 0{,}4\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}15\,x + 0{,}4\,(1 - x) \\ x &= 0{,}15\,x + 0{,}4 - 0{,}4\,x \\ x - 0{,}15\,x + 0{,}4\,x &= 0{,}4 \\ (1 - 0{,}15 + 0{,}4)\,x &= 0{,}4 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}4 \\ x &= \frac{0{,}4}{1{,}25} \\ x &= 0{,}32 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}68 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}55\,x + 0{,}3\,y & 0{,}45\,x + 0{,}7\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}55\,x + 0{,}3\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}55\,x + 0{,}3\,(1 - x) \\ x &= 0{,}55\,x + 0{,}3 - 0{,}3\,x \\ x - 0{,}55\,x + 0{,}3\,x &= 0{,}3 \\ (1 - 0{,}55 + 0{,}3)\,x &= 0{,}3 \\ 0{,}75\,x &= 0{,}3 \\ x &= \frac{0{,}3}{0{,}75} \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}7\,x + 0{,}2\,y & 0{,}3\,x + 0{,}8\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}7\,x + 0{,}2\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}7\,x + 0{,}2\,(1 - x) \\ x &= 0{,}7\,x + 0{,}2 - 0{,}2\,x \\ x - 0{,}7\,x + 0{,}2\,x &= 0{,}2 \\ (1 - 0{,}7 + 0{,}2)\,x &= 0{,}2 \\ 0{,}5\,x &= 0{,}2 \\ x &= \frac{0{,}2}{0{,}5} \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 5

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8\,x + 0{,}3\,y & 0{,}2\,x + 0{,}7\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}8\,x + 0{,}3\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}8\,x + 0{,}3\,(1 - x) \\ x &= 0{,}8\,x + 0{,}3 - 0{,}3\,x \\ x - 0{,}8\,x + 0{,}3\,x &= 0{,}3 \\ (1 - 0{,}8 + 0{,}3)\,x &= 0{,}3 \\ 0{,}5\,x &= 0{,}3 \\ x &= \frac{0{,}3}{0{,}5} \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.