Corrigé de l'exercice 1

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}45\,x + 0{,}7\,y & 0{,}55\,x + 0{,}3\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}45\,x + 0{,}7\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}45\,x + 0{,}7\,(1 - x) \\ x &= 0{,}45\,x + 0{,}7 - 0{,}7\,x \\ x - 0{,}45\,x + 0{,}7\,x &= 0{,}7 \\ (1 - 0{,}45 + 0{,}7)\,x &= 0{,}7 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}7 \\ x &= \frac{0{,}7}{1{,}25} \\ x &= 0{,}56 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}56 = 0{,}44$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}44 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2\,x + 0{,}45\,y & 0{,}8\,x + 0{,}55\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}2\,x + 0{,}45\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2\,x + 0{,}45\,(1 - x) \\ x &= 0{,}2\,x + 0{,}45 - 0{,}45\,x \\ x - 0{,}2\,x + 0{,}45\,x &= 0{,}45 \\ (1 - 0{,}2 + 0{,}45)\,x &= 0{,}45 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}45 \\ x &= \frac{0{,}45}{1{,}25} \\ x &= 0{,}36 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}55\,x + 0{,}05\,y & 0{,}45\,x + 0{,}95\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}55\,x + 0{,}05\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}55\,x + 0{,}05\,(1 - x) \\ x &= 0{,}55\,x + 0{,}05 - 0{,}05\,x \\ x - 0{,}55\,x + 0{,}05\,x &= 0{,}05 \\ (1 - 0{,}55 + 0{,}05)\,x &= 0{,}05 \\ 0{,}50\,x &= 0{,}05 \\ x &= \frac{0{,}05}{0{,}50} \\ x &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}85\,x + 0{,}25\,y & 0{,}15\,x + 0{,}75\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}85\,x + 0{,}25\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}85\,x + 0{,}25\,(1 - x) \\ x &= 0{,}85\,x + 0{,}25 - 0{,}25\,x \\ x - 0{,}85\,x + 0{,}25\,x &= 0{,}25 \\ (1 - 0{,}85 + 0{,}25)\,x &= 0{,}25 \\ 0{,}40\,x &= 0{,}25 \\ x &= \frac{0{,}25}{0{,}40} \\ x &= 0{,}625 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 5

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}9\,x + 0{,}7\,y & 0{,}1\,x + 0{,}3\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}9\,x + 0{,}7\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}9\,x + 0{,}7\,(1 - x) \\ x &= 0{,}9\,x + 0{,}7 - 0{,}7\,x \\ x - 0{,}9\,x + 0{,}7\,x &= 0{,}7 \\ (1 - 0{,}9 + 0{,}7)\,x &= 0{,}7 \\ 0{,}8\,x &= 0{,}7 \\ x &= \frac{0{,}7}{0{,}8} \\ x &= 0{,}875 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.