Corrigé de l'exercice 1

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8\,x + 0{,}3\,y & 0{,}2\,x + 0{,}7\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}8\,x + 0{,}3\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}8\,x + 0{,}3\,(1 - x) \\ x &= 0{,}8\,x + 0{,}3 - 0{,}3\,x \\ x - 0{,}8\,x + 0{,}3\,x &= 0{,}3 \\ (1 - 0{,}8 + 0{,}3)\,x &= 0{,}3 \\ 0{,}5\,x &= 0{,}3 \\ x &= \frac{0{,}3}{0{,}5} \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}8\,x + 0{,}05\,y & 0{,}2\,x + 0{,}95\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}8\,x + 0{,}05\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}8\,x + 0{,}05\,(1 - x) \\ x &= 0{,}8\,x + 0{,}05 - 0{,}05\,x \\ x - 0{,}8\,x + 0{,}05\,x &= 0{,}05 \\ (1 - 0{,}8 + 0{,}05)\,x &= 0{,}05 \\ 0{,}25\,x &= 0{,}05 \\ x &= \frac{0{,}05}{0{,}25} \\ x &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}5\,x + 0{,}75\,y & 0{,}5\,x + 0{,}25\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}5\,x + 0{,}75\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}5\,x + 0{,}75\,(1 - x) \\ x &= 0{,}5\,x + 0{,}75 - 0{,}75\,x \\ x - 0{,}5\,x + 0{,}75\,x &= 0{,}75 \\ (1 - 0{,}5 + 0{,}75)\,x &= 0{,}75 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}75 \\ x &= \frac{0{,}75}{1{,}25} \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}4\,x + 0{,}15\,y & 0{,}6\,x + 0{,}85\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}4\,x + 0{,}15\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}4\,x + 0{,}15\,(1 - x) \\ x &= 0{,}4\,x + 0{,}15 - 0{,}15\,x \\ x - 0{,}4\,x + 0{,}15\,x &= 0{,}15 \\ (1 - 0{,}4 + 0{,}15)\,x &= 0{,}15 \\ 0{,}75\,x &= 0{,}15 \\ x &= \frac{0{,}15}{0{,}75} \\ x &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 5

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}7\,x + 0{,}5\,y & 0{,}3\,x + 0{,}5\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}7\,x + 0{,}5\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}7\,x + 0{,}5\,(1 - x) \\ x &= 0{,}7\,x + 0{,}5 - 0{,}5\,x \\ x - 0{,}7\,x + 0{,}5\,x &= 0{,}5 \\ (1 - 0{,}7 + 0{,}5)\,x &= 0{,}5 \\ 0{,}8\,x &= 0{,}5 \\ x &= \frac{0{,}5}{0{,}8} \\ x &= 0{,}625 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.