Corrigé de l'exercice 1

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}65\,x + 0{,}15\,y & 0{,}35\,x + 0{,}85\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}65\,x + 0{,}15\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}65\,x + 0{,}15\,(1 - x) \\ x &= 0{,}65\,x + 0{,}15 - 0{,}15\,x \\ x - 0{,}65\,x + 0{,}15\,x &= 0{,}15 \\ (1 - 0{,}65 + 0{,}15)\,x &= 0{,}15 \\ 0{,}50\,x &= 0{,}15 \\ x &= \frac{0{,}15}{0{,}50} \\ x &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}55\,x + 0{,}05\,y & 0{,}45\,x + 0{,}95\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}55\,x + 0{,}05\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}55\,x + 0{,}05\,(1 - x) \\ x &= 0{,}55\,x + 0{,}05 - 0{,}05\,x \\ x - 0{,}55\,x + 0{,}05\,x &= 0{,}05 \\ (1 - 0{,}55 + 0{,}05)\,x &= 0{,}05 \\ 0{,}50\,x &= 0{,}05 \\ x &= \frac{0{,}05}{0{,}50} \\ x &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}85\,x + 0{,}45\,y & 0{,}15\,x + 0{,}55\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}85\,x + 0{,}45\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}85\,x + 0{,}45\,(1 - x) \\ x &= 0{,}85\,x + 0{,}45 - 0{,}45\,x \\ x - 0{,}85\,x + 0{,}45\,x &= 0{,}45 \\ (1 - 0{,}85 + 0{,}45)\,x &= 0{,}45 \\ 0{,}60\,x &= 0{,}45 \\ x &= \frac{0{,}45}{0{,}60} \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}85\,x + 0{,}35\,y & 0{,}15\,x + 0{,}65\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}85\,x + 0{,}35\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}85\,x + 0{,}35\,(1 - x) \\ x &= 0{,}85\,x + 0{,}35 - 0{,}35\,x \\ x - 0{,}85\,x + 0{,}35\,x &= 0{,}35 \\ (1 - 0{,}85 + 0{,}35)\,x &= 0{,}35 \\ 0{,}50\,x &= 0{,}35 \\ x &= \frac{0{,}35}{0{,}50} \\ x &= 0{,}7 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 5

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}85\,x + 0{,}6\,y & 0{,}15\,x + 0{,}4\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}85\,x + 0{,}6\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}85\,x + 0{,}6\,(1 - x) \\ x &= 0{,}85\,x + 0{,}6 - 0{,}6\,x \\ x - 0{,}85\,x + 0{,}6\,x &= 0{,}6 \\ (1 - 0{,}85 + 0{,}6)\,x &= 0{,}6 \\ 0{,}75\,x &= 0{,}6 \\ x &= \frac{0{,}6}{0{,}75} \\ x &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.