Corrigé de l'exercice 1

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}45\,x + 0{,}25\,y & 0{,}55\,x + 0{,}75\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}45\,x + 0{,}25\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}45\,x + 0{,}25\,(1 - x) \\ x &= 0{,}45\,x + 0{,}25 - 0{,}25\,x \\ x - 0{,}45\,x + 0{,}25\,x &= 0{,}25 \\ (1 - 0{,}45 + 0{,}25)\,x &= 0{,}25 \\ 0{,}80\,x &= 0{,}25 \\ x &= \frac{0{,}25}{0{,}80} \\ x &= 0{,}312\ 5 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}312\ 5 = 0{,}687\ 5$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}312\ 5 & 0{,}687\ 5 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2\,x + 0{,}45\,y & 0{,}8\,x + 0{,}55\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}2\,x + 0{,}45\,y$.
D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}2\,x + 0{,}45\,(1 - x) \\ x &= 0{,}2\,x + 0{,}45 - 0{,}45\,x \\ x - 0{,}2\,x + 0{,}45\,x &= 0{,}45 \\ (1 - 0{,}2 + 0{,}45)\,x &= 0{,}45 \\ 1{,}25\,x &= 0{,}45 \\ x &= \frac{0{,}45}{1{,}25} \\ x &= 0{,}36 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}64 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}5\,x + 0{,}3\,y & 0{,}5\,x + 0{,}7\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}5\,x + 0{,}3\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}5\,x + 0{,}3\,(1 - x) \\ x &= 0{,}5\,x + 0{,}3 - 0{,}3\,x \\ x - 0{,}5\,x + 0{,}3\,x &= 0{,}3 \\ (1 - 0{,}5 + 0{,}3)\,x &= 0{,}3 \\ 0{,}8\,x &= 0{,}3 \\ x &= \frac{0{,}3}{0{,}8} \\ x &= 0{,}375 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}65\,x + 0{,}05\,y & 0{,}35\,x + 0{,}95\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}65\,x + 0{,}05\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}65\,x + 0{,}05\,(1 - x) \\ x &= 0{,}65\,x + 0{,}05 - 0{,}05\,x \\ x - 0{,}65\,x + 0{,}05\,x &= 0{,}05 \\ (1 - 0{,}65 + 0{,}05)\,x &= 0{,}05 \\ 0{,}40\,x &= 0{,}05 \\ x &= \frac{0{,}05}{0{,}40} \\ x &= 0{,}125 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 5

Puisque P est l'état stable, alors $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} P \times M &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}85\,x + 0{,}45\,y & 0{,}15\,x + 0{,}55\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = P = P \times M$, donc les coefficients des matrices sont deux à deux égaux, donc $x = 0{,}85\,x + 0{,}45\,y$. D'autre part, puisque P est un état probabiliste, alors $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$. Donc, en remplaçant y par $1 - x$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 0{,}85\,x + 0{,}45\,(1 - x) \\ x &= 0{,}85\,x + 0{,}45 - 0{,}45\,x \\ x - 0{,}85\,x + 0{,}45\,x &= 0{,}45 \\ (1 - 0{,}85 + 0{,}45)\,x &= 0{,}45 \\ 0{,}60\,x &= 0{,}45 \\ x &= \frac{0{,}45}{0{,}60} \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Enfin, puisque $y = 1 - x$, alors $y = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.
L'unique état stable de ce graphe est donc $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.