Corrigé de l'exercice 1

►1. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 2x^3 - 30x^2 + 150x + 6$ sur $\mathbb{R}$.
$p'(x) = 6x^2 - 60x + 150$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-60)^2 - 4 \times 6 \times 150 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, $p'(x)$ a une seule racine $x_0 = \dfrac{-(-60)}{2 \times 6} = 5$.

Comme $\Delta < 0$, $p'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$p'(x)$	$+$

Donc la fonction polynômiale p est croissante sur $\mathbb{R}$.

►2. On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{5t+7}{4t+6}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en t si $4t + 6 \neq 0$.

$$\begin{aligned} 4t + 6 &= 0 \\ 4t &= -6 \\ t &= -6 \times \frac{1}{4} \\ t &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D'}_g =]-\infty\ ;\ -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D'}_g$.

$$g'(t) = \frac{5 \times\ (4t+6) - (5t+7) \times 4}{(4t+6)^2} = \frac{2}{(4t+6)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{5t+7}{4t+6} = \lim_{t \to -\infty} \frac{5t}{4t} = \frac{-5}{4}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{5t+7}{4t+6} = \lim_{t \to +\infty} \frac{5t}{4t} = \frac{-5}{4}$$

Pour $t = -\frac{3}{2}$, on a $5t + 7 = -\frac{1}{2} < 0$.
De plus, $4t + 6 < 0$ si $t < -\frac{3}{2}$ et $4t + 6 > 0$ si $t > -\frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{t \to -\frac{3}{2} \\ t < -\frac{3}{2}}} \frac{5t+7}{4t+6} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{t \to -\frac{3}{2} \\ t > -\frac{3}{2}}} \frac{5t+7}{4t+6} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(4t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $2 > 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) > 0$.

t	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-5}{4}$ $\|$ $\dfrac{-5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 - 27x^2 + 84x - 6$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) = 6x^2 - 54x + 84$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-54)^2 - 4 \times 6 \times 84 = 900$ et $\sqrt{900} = 30$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-54)-\sqrt{900}}{2\times 6} &= \frac{54-\sqrt{900}}{12}\\ &= \frac{54-30}{12}\\ &= \frac{24}{12}\\ &= 2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-54)+\sqrt{900}}{2\times 6} &= \frac{54+\sqrt{900}}{12}\\ &= \frac{54+30}{12}\\ &= \frac{84}{12}\\ &= 7\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 7$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	

Comme $\Delta < 0$, $h'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale h est croissante sur $\mathbb{R}$.

►2. On considère la fonction k définie par $k(t) = \dfrac{-t+2}{5t+6}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_k$ de k.
La fonction rationnelle k est définie et dérivable en t si $5t + 6 \neq 0$.

$$\begin{aligned}5t + 6 &= 0\\ 5t &= -6\\ t &= -6 \times \frac{1}{5}\\ t &= -\frac{6}{5}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_k = \mathcal{D'}_k =]-\infty\ ;\ -\dfrac{6}{5}[\cup]-\dfrac{6}{5}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D'}_k$.

$$k'(t) = \frac{(-11)\times\ (5t+6) - (-t+2)\times 5}{(5t+6)^2} = \frac{-16}{(5t+6)^2}$$

c) Déterminer les limites de k aux bornes de $\mathcal{D}_k$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{-t+2}{5t+6} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{5t} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-t+2}{5t+6}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{5t}=\frac{1}{5}$$

Pour $t=-\frac{6}{5}$, on a $-t+2=\frac{16}{5}>0$.
De plus, $5t+6<0$ si $t<-\frac{6}{5}$ et $5t+6>0$ si $t>-\frac{6}{5}$.

$$\lim_{\substack{t\to-\frac{6}{5}\\ t<-\frac{6}{5}}}\frac{-t+2}{5t+6}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to-\frac{6}{5}\\ t>-\frac{6}{5}}}\frac{-t+2}{5t+6}=-\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de k sur $\mathcal{D}_k$.
Comme $(5t+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-16<0$ donc pour tout t de I, $k'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$-$	
$k(x)$	$\frac{1}{5}$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ $\frac{1}{5}$

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x)=2x^3+18x^2+48x-6$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x)=6x^2+36x+48$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta=36^2-4\times6\times48=144$ et $\sqrt{144}=12$.
Comme $\Delta>0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-36-\sqrt{144}}{2\times6}=\frac{-36-\sqrt{144}}{12}=\frac{-36-12}{12}=\frac{-48}{12}=-4$$

$$\frac{-36+\sqrt{144}}{2\times6}=\frac{-36+\sqrt{144}}{12}=\frac{-36+12}{12}=\frac{-24}{12}=-2$$

Les racines de h' sont $x_1=-4$ et $x_2=-2$.
Comme $\Delta>0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-38	↘	-46	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3+18x^2+48x-6 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3+18x^2+48x-6 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

►**2.** On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{3t-5}{-2t-7}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en t si $-2t-7 \neq 0$.

$$\begin{aligned} -2t-7 &= 0 \\ -2t &= 7 \\ t &= 7 \times \frac{1}{-2} \\ t &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}'_g =]-\infty\ ;\ -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{7}{2}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}'_g$.

$$g'(t) = \frac{3\times(-2t-7)-(3t-5)\times(-2)}{(-2t-7)^2} = \frac{-31}{(-2t-7)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{3t-5}{-2t-7} = \lim_{t\to-\infty} \frac{3t}{-2t} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{3t-5}{-2t-7} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t}{-2t} = \frac{3}{2}$$

Pour $t = -\frac{7}{2}$, on a $3t-5 = -\frac{31}{2} < 0$.
De plus, $-2t-7 > 0$ si $t < -\frac{7}{2}$ et $-2t-7 < 0$ si $t > -\frac{7}{2}$.

$$\lim_{\substack{t\to-\frac{7}{2}\\ t<-\frac{7}{2}}} \frac{3t-5}{-2t-7} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to-\frac{7}{2}\\ t>-\frac{7}{2}}} \frac{3t-5}{-2t-7} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(-2t-7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-31 < 0$ donc pour tout t de I, $g'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$-$
$g(x)$	$\frac{3}{2}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\frac{3}{2}$