Corrigé de l'exercice 1

►1. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

$k'(x) = 3x^2 - 12x$

Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 0 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-12)-\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{12-\sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{12-12}{6}\\ &= \frac{0}{6}\\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-12)+\sqrt{144}}{2\times 3} &= \frac{12+\sqrt{144}}{6}\\ &= \frac{12+12}{6}\\ &= \frac{24}{6}\\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 6x^2 + 5 = \lim_{x\to-\infty} 1x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 6x^2 + 5 = \lim_{x\to+\infty} 1x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3x+7}{3x-4}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

La fonction rationnelle g est définie et dérivable en x si $3x - 4 \neq 0$.

$$\begin{aligned}3x - 4 &= 0\\ 3x &= 4\\ x &= 4 \times \frac{1}{3}\\ x &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}'_g =]-\infty\ ;\ \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_g$.

$$g'(x) = \frac{3\times\ (3x-4) - (3x+7)\times 3}{(3x-4)^2} = \frac{-33}{(3x-4)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+7}{3x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3x} = -1 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{3x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{3x} = -1 = -1$$

Pour $x = \frac{4}{3}$, on a $3x + 7 = 11 > 0$.
De plus, $3x - 4 < 0$ si $x < \frac{4}{3}$ et $3x - 4 > 0$ si $x > \frac{4}{3}$.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{4}{3}\\ x<\frac{4}{3}}} \frac{3x+7}{3x-4} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{4}{3}\\ x>\frac{4}{3}}} \frac{3x+7}{3x-4} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(3x-4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-33 < 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 + 6x^2 - 135x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = 3x^2 + 12x - 135$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times (-135) = 1\,764$ et $\sqrt{1\,764} = 42$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-12-\sqrt{1\,764}}{2\times 3} &= \frac{-12-\sqrt{1\,764}}{6}\\ &= \frac{-12-42}{6}\\ &= \frac{-54}{6}\\ &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-12+\sqrt{1\,764}}{2\times 3} &= \frac{-12+\sqrt{1\,764}}{6}\\ &= \frac{-12+42}{6}\\ &= \frac{30}{6}\\ &= 5\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = 5$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-9		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-9		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	967	$\searrow$	-405	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+6x^2-135x-5 = \lim_{x\to-\infty} 1x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+6x^2-135x-5 = \lim_{x\to+\infty} 1x^3 = +\infty$$

►**2.** On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x-7}{-5x-2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
La fonction rationnelle f est définie et dérivable en x si $-5x-2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} -5x-2 &= 0 \\ -5x &= 2 \\ x &= 2 \times \frac{1}{-5} \\ x &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f =]-\infty\ ;\ -\frac{2}{5}[\cup]-\frac{2}{5}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_f$.

$$f'(x) = \frac{(-11)\times(-5x-2)-(-x-7)\times(-5)}{(-5x-2)^2} = \frac{-33}{(-5x-2)^2}$$

c) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x-7}{-5x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-5x} = \frac{-1}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x-7}{-5x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{-5x} = \frac{-1}{5}$$

Pour $x = -\frac{2}{5}$, on a $-x-7 = -\frac{33}{5} < 0$.
De plus, $-5x-2 > 0$ si $x < -\frac{2}{5}$ et $-5x-2 < 0$ si $x > -\frac{2}{5}$.

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{2}{5} \\ x<-\frac{2}{5}}} \frac{-x-7}{-5x-2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{2}{5} \\ x>-\frac{2}{5}}} \frac{-x-7}{-5x-2} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
Comme $(-5x-2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-33 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$	$-\dfrac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\dfrac{-1}{5}$ ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ $\dfrac{-1}{5}$

Corrigé de l'exercice 3

►1. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3 + 27x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 6x^2 + 54x$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 54^2 - 4 \times 6 \times 0 = 2\,916$ et $\sqrt{2\,916} = 54$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-54-\sqrt{2\,916}}{2\times 6} &= \frac{-54-\sqrt{2\,916}}{12}\\ &= \frac{-54-54}{12}\\ &= \frac{-108}{12}\\ &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-54+\sqrt{2\,916}}{2\times 6} &= \frac{-54+\sqrt{2\,916}}{12}\\ &= \frac{-54+54}{12}\\ &= \frac{0}{12}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = 0$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-9		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-9		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	732	↘	3	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 27x^2 + 3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 27x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{-x-5}{2x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_k$ de k.
La fonction rationnelle k est définie et dérivable en x si $2x - 3 \neq 0$.

$$\begin{aligned}2x-3&=0\\ 2x&=3\\ x&=3\times\frac{1}{2}\\ x&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}'_k =]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_k$.

$$k'(x) = \frac{(-11) \times\ (2x-3) - (-x-5) \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{13}{(2x-3)^2}$$

c) Déterminer les limites de k aux bornes de $\mathcal{D}_k$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-5}{2x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x-5}{2x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Pour $x = \frac{3}{2}$, on a $-x-5 = -\frac{13}{2} < 0$.

De plus, $2x-3 < 0$ si $x < \frac{3}{2}$ et $2x-3 > 0$ si $x > \frac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} \frac{-x-5}{2x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} \frac{-x-5}{2x-3} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de k sur $\mathcal{D}_k$.

Comme $(2x-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $13 > 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	||	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ || $\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$