Corrigé de l'exercice 1

►1. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 54x - 6$ sur $\mathbb{R}$.

$k'(x) = 3x^2 + 9x - 54$
Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-54) = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-9-\sqrt{729}}{2\times 3} &= \frac{-9-\sqrt{729}}{6}\\ &= \frac{-9-27}{6}\\ &= \frac{-36}{6}\\ &= -6\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-9+\sqrt{729}}{2\times 3} &= \frac{-9+\sqrt{729}}{6}\\ &= \frac{-9+27}{6}\\ &= \frac{18}{6}\\ &= 3\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 3$.
Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-6		3		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	$-\infty$		-6		3		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	264	$\searrow$	$-\dfrac{201}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 54x - 6 = \lim_{x\to-\infty} 1x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 54x - 6 = \lim_{x\to+\infty} 1x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{-2t-6}{-3t+8}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
La fonction rationnelle f est définie et dérivable en t si $-3t + 8 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-3t + 8 &= 0\\ -3t &= -8\\ t &= -8 \times \frac{1}{-3}\\ t &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f =]-\infty\ ;\ \dfrac{8}{3}[\cup]\dfrac{8}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}'_f$.

$$f'(t) = \frac{(-2)\times(-3t+8) - (-2t-6)\times(-3)}{(-3t+8)^2} = \frac{-34}{(-3t+8)^2}$$

c) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{-2t-6}{-3t+8} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-2t}{-3t} = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-2t-6}{-3t+8} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2t}{-3t} = \frac{-2}{3}$$

Pour $t = \frac{8}{3}$, on a $-2t-6 = -\frac{34}{3} < 0$.
De plus, $-3t+8 > 0$ si $t < \frac{8}{3}$ et $-3t+8 < 0$ si $t > \frac{8}{3}$.

$$\lim_{\substack{t\to\frac{8}{3}\\ t<\frac{8}{3}}} \frac{-2t-6}{-3t+8} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to\frac{8}{3}\\ t>\frac{8}{3}}} \frac{-2t-6}{-3t+8} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
Comme $(-3t+8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-34 < 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) < 0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$		$\frac{8}{3}$			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$-$	
$f(x)$	$\frac{-2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-2}{3}$

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 + 15x$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 15^2 - 4 \times 3 \times 0 = 225$ et $\sqrt{225} = 15$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-15-\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-15-\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-15-15}{6}\\ &= \frac{-30}{6}\\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-15+\sqrt{225}}{2\times 3} &= \frac{-15+\sqrt{225}}{6}\\ &= \frac{-15+15}{6}\\ &= \frac{0}{6}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -5$ et $x_2 = 0$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{119}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+\frac{15}{2}x^2-3=\lim_{x\to-\infty}1x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3+\frac{15}{2}x^2-3=\lim_{x\to+\infty}1x^3=+\infty$$

►2. On considère la fonction k définie par $k(t)=\dfrac{3t+1}{2t-8}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_k$ de k.
La fonction rationnelle k est définie et dérivable en t si $2t-8\neq 0$.

$$\begin{aligned}2t-8&=0\\ 2t&=8\\ t&=8\times\frac{1}{2}\\ t&=4\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_k=\mathcal{D}'_k=]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t\in\mathcal{D}'_k$.

$$k'(t)=\frac{3\times\ (2t-8)-(3t+1)\times 2}{(2t-8)^2}=\frac{-26}{(2t-8)^2}$$

c) Déterminer les limites de k aux bornes de $\mathcal{D}_k$.

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{3t+1}{2t-8}=\lim_{t\to-\infty}\frac{3t}{2t}=\frac{-3}{2}$$
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+1}{2t-8}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t}{2t}=\frac{-3}{2}$$

Pour $t=4$, on a $3t+1=13>0$.
De plus, $2t-8<0$ si $t<4$ et $2t-8>0$ si $t>4$.

$$\lim_{\substack{t\to4\\t<4}}\frac{3t+1}{2t-8}=+\infty$$
$$\lim_{\substack{t\to4\\t>4}}\frac{3t+1}{2t-8}=-\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de k sur $\mathcal{D}_k$.
Comme $(2t-8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-26<0$ donc pour tout t de I, $k'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$		4		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$k(x)$	$\frac{-3}{2}$	$\searrow$	$-\infty\ \|\ +\infty$	$\searrow$	$\frac{-3}{2}$

Corrigé de l'exercice 3

►**1.** Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 3x^3 + \dfrac{27}{2}x^2 + 18x + 5$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 9x^2 + 27x + 18$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 27^2 - 4 \times 9 \times 18 = 81$ et $\sqrt{81} = 9$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-27-\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{-27-\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{-27-9}{18}\\ &= \frac{-36}{18}\\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-27+\sqrt{81}}{2\times 9} &= \frac{-27+\sqrt{81}}{18}\\ &= \frac{-27+9}{18}\\ &= \frac{-18}{18}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^3 + \frac{27}{2}x^2 + 18x + 5 = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3 + \frac{27}{2}x^2 + 18x + 5 = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$$

►**2.** On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+7}{-x+6}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en x si $-x + 6 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-x + 6 &= 0\\ -x &= -6\\ x &= -6 \times \frac{1}{-1}\\ x &= 6\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D'}_g =]-\infty\ ;\ 6[\cup]6\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D'}_g$.

$$g'(x) = \frac{2\times\ (-x+6) - (2x+7)\times\ (-11)}{(-x+6)^2} = \frac{19}{(-x+6)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+7}{-x+6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = 2 = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+7}{-x+6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{-x} = 2 = 2$$

Pour $x = 6$, on a $2x + 7 = 19 > 0$.
De plus, $-x + 6 > 0$ si $x < 6$ et $-x + 6 < 0$ si $x > 6$.

$$\lim_{\substack{x \to 6 \\ x < 6}} \frac{2x+7}{-x+6} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} \frac{2x+7}{-x+6} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(-x+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $19 > 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) > 0$.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2 \quad \| \quad 2$	$\nearrow$	$+\infty$