Corrigé de l'exercice 1

►1. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 2x^3 + 18x^2 + 48x + 2$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) = 6x^2 + 36x + 48$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 36^2 - 4 \times 6 \times 48 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-36-\sqrt{144}}{2\times 6} &= \frac{-36-\sqrt{144}}{12}\\ &= \frac{-36-12}{12}\\ &= \frac{-48}{12}\\ &= -4\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-36+\sqrt{144}}{2\times 6} &= \frac{-36+\sqrt{144}}{12}\\ &= \frac{-36+12}{12}\\ &= \frac{-24}{12}\\ &= -2\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = -2$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-30	$\searrow$	-38	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 18x^2 + 48x + 2 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 18x^2 + 48x + 2 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{-5x+3}{-2x+9}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
La fonction rationnelle h est définie et dérivable en x si $-2x + 9 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-2x + 9 &= 0\\ -2x &= -9\\ x &= -9 \times \frac{1}{-2}\\ x &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}'_h =]-\infty\ ;\ \frac{9}{2}[\cup]\frac{9}{2}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_h$.

$$h'(x) = \frac{(-5)\times\ (-2x+9) - (-5x+3)\times\ (-2)}{(-2x+9)^2} = \frac{-39}{(-2x+9)^2}$$

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-5x+3}{-2x+9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{-2x} = \frac{-5}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+3}{-2x+9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x}{-2x} = \frac{-5}{2}$$

Pour $x = \frac{9}{2}$, on a $-5x+3 = -\frac{39}{2} < 0$.
De plus, $-2x+9 > 0$ si $x < \frac{9}{2}$ et $-2x+9 < 0$ si $x > \frac{9}{2}$.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{9}{2}\\ x<\frac{9}{2}}} \frac{-5x+3}{-2x+9} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{9}{2}\\ x>\frac{9}{2}}} \frac{-5x+3}{-2x+9} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.
Comme $(-2x+9)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-39 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	$\frac{-5}{2}$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ $\frac{-5}{2}$

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 3x^3 + 45x^2 + 81x - 3$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 9x^2 + 90x + 81$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 90^2 - 4 \times 9 \times 81 = 5\,184$ et $\sqrt{5\,184} = 72$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-90-\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-90-\sqrt{5\,184}}{18}\\ &= \frac{-90-72}{18}\\ &= \frac{-162}{18}\\ &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-90+\sqrt{5\,184}}{2\times 9} &= \frac{-90+\sqrt{5\,184}}{18}\\ &= \frac{-90+72}{18}\\ &= \frac{-18}{18}\\ &= -1\end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	726	$\searrow$	-42	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^3+45x^2+81x-3 = \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3+45x^2+81x-3 = \lim_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$$

▶**2.** On considère la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{-4t-6}{4t+8}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en t si $4t+8 \neq 0$.

$$\begin{aligned} 4t+8 &= 0 \\ 4t &= -8 \\ t &= -8 \times \frac{1}{4} \\ t &= -2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}'_g =]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}'_g$.

$$g'(t) = \frac{(-4)\times\ (4t+8) - (-4t-6)\times 4}{(4t+8)^2} = \frac{-8}{(4t+8)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{-4t-6}{4t+8} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-4t}{4t} = 1$$
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-4t-6}{4t+8} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-4t}{4t} = 1$$

Pour $t=-2$, on a $-4t-6 = 2 > 0$.
De plus, $4t+8<0$ si $t<-2$ et $4t+8>0$ si $t>-2$.

$$\lim_{\substack{t\to-2\\t<-2}} \frac{-4t-6}{4t+8} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{t\to-2\\t>-2}} \frac{-4t-6}{4t+8} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(4t+8)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-8<0$ donc pour tout t de I, $g'(t)<0$. Ainsi, on obtient

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Corrigé de l'exercice 3

►1. Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 4$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) = 3x^2 + 12x - 36$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times\ (-36) = 576$ et $\sqrt{576} = 24$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-12-\sqrt{576}}{2\times 3} &= \frac{-12-\sqrt{576}}{6}\\ &= \frac{-12-24}{6}\\ &= \frac{-36}{6}\\ &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-12+\sqrt{576}}{2\times 3} &= \frac{-12+\sqrt{576}}{6}\\ &= \frac{-12+24}{6}\\ &= \frac{12}{6}\\ &= 2\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 2$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	220	$\searrow$	-36	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 6x^2 - 36x + 4 = \lim_{x\to-\infty} 1x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 6x^2 - 36x + 4 = \lim_{x\to+\infty} 1x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction k définie par $k(t) = \dfrac{t+8}{-3t+4}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_k$ de k.
La fonction rationnelle k est définie et dérivable en t si $-3t + 4 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-3t+4 &= 0\\ -3t &= -4\\ t &= -4\times\frac{1}{-3}\\ t &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_k = \mathcal{D'}_k =]-\infty\ ;\ \frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $k'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D'}_k$.

$$k'(t) = \frac{11\times\ (-3t+4) - (t+8)\times\ (-3)}{(-3t+4)^2} = \frac{28}{(-3t+4)^2}$$

c) Déterminer les limites de k aux bornes de $\mathcal{D}_k$.

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t+8}{-3t+4} = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{-3t} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t+8}{-3t+4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{-3t} = \frac{1}{3}$$

Pour $t = \frac{4}{3}$, on a $t + 8 = \frac{28}{3} > 0$.
De plus, $-3t + 4 > 0$ si $t < \frac{4}{3}$ et $-3t + 4 < 0$ si $t > \frac{4}{3}$.

$$\lim_{\substack{t \to \frac{4}{3} \\ t < \frac{4}{3}}} \frac{t+8}{-3t+4} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t \to \frac{4}{3} \\ t > \frac{4}{3}}} \frac{t+8}{-3t+4} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de k sur $\mathcal{D}_k$.
Comme $(-3t+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $28 > 0$ donc pour tout t de I, $k'(t) > 0$.

t	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	||	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$ || $\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$