Corrigé de l'exercice 1

►1. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 2x^3 - 15x^2 - 144x$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 6x^2 - 30x - 144$

Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times (-144) = 4\,356$ et $\sqrt{4\,356} = 66$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-30)-\sqrt{4\,356}}{2\times 6} &= \frac{30-\sqrt{4\,356}}{12}\\ &= \frac{30-66}{12}\\ &= \frac{-36}{12}\\ &= -3\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{-(-30)+\sqrt{4\,356}}{2\times 6} &= \frac{30+\sqrt{4\,356}}{12}\\ &= \frac{30+66}{12}\\ &= \frac{96}{12}\\ &= 8\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{71}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{71}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{71}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{71}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{845}{2}$	$\searrow$	$-\frac{845}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 15x^2 - 144x = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 - 144x = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{5x-4}{-5x+1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

La fonction rationnelle h est définie et dérivable en x si $-5x + 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-5x+1 &= 0\\ -5x &= -1\\ x &= -1 \times \frac{1}{-5}\\ x &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_h = \mathcal{D'}_h =]-\infty\,;\,\frac{1}{5}[\cup]\frac{1}{5}\,;\,+\infty[$.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D'}_h$.

$$h'(x) = \frac{5 \times (-5x+1) - (5x-4) \times (-5)}{(-5x+1)^2} = \frac{-15}{(-5x+1)^2}$$

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x-4}{-5x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{-5x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-4}{-5x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{-5x} = 1$$

Pour $x = \dfrac{1}{5}$, on a $5x - 4 = -3 < 0$.
De plus, $-5x+1 > 0$ si $x < \dfrac{1}{5}$ et $-5x+1 < 0$ si $x > \dfrac{1}{5}$.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{5}\\ x<\frac{1}{5}}} \frac{5x-4}{-5x+1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{5}\\ x>\frac{1}{5}}} \frac{5x-4}{-5x+1} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.
Comme $(-5x+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-15 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	||	$-$
$h(x)$	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = 3x^3 + \dfrac{81}{2}x^2 + 126x + 4$ sur $\mathbb{R}$.
$g'(x) = 9x^2 + 81x + 126$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 81^2 - 4 \times 9 \times 126 = 2\,025$ et $\sqrt{2\,025} = 45$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-81-\sqrt{2\,025}}{2\times 9} &= \frac{-81-\sqrt{2\,025}}{18}\\ &= \frac{-81-45}{18}\\ &= \frac{-126}{18}\\ &= -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-81+\sqrt{2\,025}}{2\times 9} &= \frac{-81+\sqrt{2\,025}}{18}\\ &= \frac{-81+45}{18}\\ &= \frac{-36}{18}\\ &= -2\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = -2$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-7		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-7		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{155}{2}$	$\searrow$	-110	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^3+\frac{81}{2}x^2+126x+4=\lim_{x\to-\infty} 3x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3+\frac{81}{2}x^2+126x+4=\lim_{x\to+\infty} 3x^3=+\infty$$

►**2.** On considère la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{-3x-4}{-3x+7}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
La fonction rationnelle h est définie et dérivable en x si $-3x+7\neq 0$.

$$\begin{aligned}-3x+7&=0\\ -3x&=-7\\ x&=-7\times\frac{1}{-3}\\ x&=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_h=\mathcal{D}'_h=]-\infty\ ;\ \frac{7}{3}[\cup]\frac{7}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}'_h$.

$$h'(x)=\frac{(-3)\times(-3x+7)-(-3x-4)\times(-3)}{(-3x+7)^2}=\frac{-33}{(-3x+7)^2}$$

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-4}{-3x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-3x}=-1=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x-4}{-3x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{-3x}=-1=-1$$

Pour $x=\frac{7}{3}$, on a $-3x-4=-11<0$.
De plus, $-3x+7>0$ si $x<\frac{7}{3}$ et $-3x+7<0$ si $x>\frac{7}{3}$.

$$\lim_{\substack{x\to\frac{7}{3}\\ x<\frac{7}{3}}}\frac{-3x-4}{-3x+7}=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to\frac{7}{3}\\ x>\frac{7}{3}}}\frac{-3x-4}{-3x+7}=+\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.
Comme $(-3x+7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-33<0$ donc pour tout x de I, $h'(x)<0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Corrigé de l'exercice 3

►1. Étudier le sens de variations de k définie par $k(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

$k'(x) = 6x^2 + 6x$

Je dois étudier le signe de $k'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times 0 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-6-\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{-6-\sqrt{36}}{12}\\ &= \frac{-6-6}{12}\\ &= \frac{-12}{12}\\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-6+\sqrt{36}}{2\times 6} &= \frac{-6+\sqrt{36}}{12}\\ &= \frac{-6+6}{12}\\ &= \frac{0}{12}\\ &= 0\end{aligned}$$

Les racines de k' sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 0$.

Comme $\Delta > 0$, $k'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de k.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	5	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 3x^2 + 5 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 3x^2 + 5 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

►2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x-8}{-3x-2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

La fonction rationnelle f est définie et dérivable en x si $-3x - 2 \neq 0$.

$$\begin{aligned}-3x - 2 &= 0\\ -3x &= 2\\ x &= 2 \times \frac{1}{-3}\\ x &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}'_f =]-\infty\ ;\ -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_f$.

$$f'(x) = \frac{5 \times (-3x-2) - (5x-8) \times (-3)}{(-3x-2)^2} = \frac{-34}{(-3x-2)^2}$$

c) Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x-8}{-3x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{-3x} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x-8}{-3x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{-3x} = \frac{5}{3}$$

Pour $x = -\frac{2}{3}$, on a $5x - 8 = -\frac{34}{3} < 0$.
De plus, $-3x-2 > 0$ si $x < -\frac{2}{3}$ et $-3x-2 < 0$ si $x > -\frac{2}{3}$.

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{2}{3} \\ x < -\frac{2}{3}}} \frac{5x-8}{-3x-2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{2}{3} \\ x > -\frac{2}{3}}} \frac{5x-8}{-3x-2} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
Comme $(-3x-2)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-34 < 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{5}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{3}$