Corrigé de l'exercice 1

▶1. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = 2x^3 + 30x^2 + 54x - 6$ sur $\mathbb{R}$.
$p'(x) = 6x^2 + 60x + 54$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 60^2 - 4 \times 6 \times 54 = 2\,304$ et $\sqrt{2\,304} = 48$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-60-\sqrt{2\,304}}{2\times 6} &= \frac{-60-\sqrt{2\,304}}{12} \\ &= \frac{-60-48}{12} \\ &= \frac{-108}{12} \\ &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{-60+\sqrt{2\,304}}{2\times 6} &= \frac{-60+\sqrt{2\,304}}{12} \\ &= \frac{-60+48}{12} \\ &= \frac{-12}{12} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -9$ et $x_2 = -1$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	480	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 30x^2 + 54x - 6 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 30x^2 + 54x - 6 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

▶2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3x-7}{-5x-3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en x si $-5x - 3 \neq 0$.

$$\begin{aligned} -5x - 3 &= 0 \\ -5x &= 3 \\ x &= 3 \times \frac{1}{-5} \\ x &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}'_g =]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{5}[\cup]-\dfrac{3}{5}\,;\,+\infty[$.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_g$.

$$g'(x) = \frac{3 \times (-5x-3) - (3x-7) \times (-5)}{(-5x-3)^2} = \frac{-44}{(-5x-3)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-7}{-5x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-5x} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-7}{-5x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{-5x} = \frac{3}{5}$$

Pour $x = -\frac{3}{5}$, on a $3x-7 = -\frac{44}{5} < 0$.
De plus, $-5x-3 > 0$ si $x < -\frac{3}{5}$ et $-5x-3 < 0$ si $x > -\frac{3}{5}$.

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{5} \\ x<-\frac{3}{5}}} \frac{3x-7}{-5x-3} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{5} \\ x>-\frac{3}{5}}} \frac{3x-7}{-5x-3} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(-5x-3)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-44 < 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$\frac{3}{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{5}$

Corrigé de l'exercice 2

►1. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 7$ sur $\mathbb{R}$.
$p'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-24) = 324$ et $\sqrt{324} = 18$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-6-\sqrt{324}}{2\times 3} &= \frac{-6-\sqrt{324}}{6} \\ &= \frac{-6-18}{6} \\ &= \frac{-24}{6} \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-6+\sqrt{324}}{2\times 3} &= \frac{-6+\sqrt{324}}{6} \\ &= \frac{-6+18}{6} \\ &= \frac{12}{6} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Les racines de p' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 2$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	87	$\searrow$	-21	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3+3x^2-24x+7 = \lim_{x\to-\infty} 1x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3+3x^2-24x+7 = \lim_{x\to+\infty} 1x^3 = +\infty$$

►**2.** On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{-2x-5}{x+1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
La fonction rationnelle h est définie et dérivable en x si $x+1 \neq 0$.

$x+1=0$
$x=-1$

On en déduit que $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}'_h =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_h$.

$$h'(x) = \frac{(-2)\times\ (x+1)-(-2x-5)\times 11}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

c) Déterminer les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x-5}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x} = 2 = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-5}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x} = 2 = 2$$

Pour $x=-1$, on a $-2x-5=-3<0$.
De plus, $x+1<0$ si $x<-1$ et $x+1>0$ si $x>-1$.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{-2x-5}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{-2x-5}{x+1} = +\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de h sur $\mathcal{D}_h$.
Comme $(x+1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $3>0$ donc pour tout x de I, $h'(x)>0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2 \,\|\, 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Corrigé de l'exercice 3

►1. Étudier le sens de variations de f définie par $f(x) = 2x^3 - 39x^2 + 252x + 8$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 6x^2 - 78x + 252$
Je dois étudier le signe de $f'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-78)^2 - 4 \times 6 \times 252 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-78) - \sqrt{36}}{2 \times 6} &= \frac{78 - \sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{78-6}{12} \\ &= \frac{72}{12} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-78) + \sqrt{36}}{2 \times 6} &= \frac{78 + \sqrt{36}}{12} \\ &= \frac{78+6}{12} \\ &= \frac{84}{12} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Les racines de f' sont $x_1 = 6$ et $x_2 = 7$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

Comme $\Delta < 0$, $f'(x)$ ne s'annule pas et est toujours du signe de a Ainsi
Donc la fonction polynômiale f est croissante sur $\mathbb{R}$.

►2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3x+3}{-2x+7}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.
La fonction rationnelle g est définie et dérivable en x si $-2x + 7 \neq 0$.

$$\begin{aligned} -2x + 7 &= 0 \\ -2x &= -7 \\ x &= -7 \times \frac{1}{-2} \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}'_g =]-\infty\ ;\ \frac{7}{2}[\cup]\frac{7}{2}\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}'_g$.

$$g'(x) = \frac{3 \times\ (-2x+7) - (3x+3) \times\ (-2)}{(-2x+7)^2} = \frac{27}{(-2x+7)^2}$$

c) Déterminer les limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+3}{-2x+7} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{-2x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+3}{-2x+7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{-2x} = \frac{3}{2}$$

Pour $x = \dfrac{7}{2}$, on a $3x + 3 = \dfrac{27}{2} > 0$.
De plus, $-2x + 7 > 0$ si $x < \dfrac{7}{2}$ et $-2x + 7 < 0$ si $x > \dfrac{7}{2}$.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{7}{2} \\ x < \frac{7}{2}}} \frac{3x+3}{-2x+7} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{7}{2} \\ x > \frac{7}{2}}} \frac{3x+3}{-2x+7} = -\infty$$

d) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathcal{D}_g$.
Comme $(-2x+7)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $27 > 0$ donc pour tout x de I, $g'(x) > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$ $\|$ $\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$