Corrigé de l'exercice 1

Argument et forme trigonométrique

1)

On utilise les valeurs exactes de cos et sin : $z = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\, i.$

2)

$|z| = 5 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$ (argument principal).

3)

On rappelle : $|zw| = |z||w|$ et $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$.

Donc $zw = 5 \cdot 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 25\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

$\arg(zw) = \frac{5\pi}{6}$ (argument principal).

4)

Par la formule de Moivre : $z^3 = 5^3\left(\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) = 125\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$.

$\arg(z^3) = \pi$ (argument principal).

Corrigé de l'exercice 2

Argument et forme trigonométrique

1)

On utilise les valeurs exactes de cos et sin : $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\, i.$

2)

$|z| = 3 \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ (argument principal).

3)

On rappelle : $|zw| = |z||w|$ et $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$.

Donc $zw = 3 \cdot 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 0\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 0\right)\right) = 15\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$\arg(zw) = \frac{2\pi}{3}$ (argument principal).

4)

Par la formule de Moivre : $z^2 = 3^2\left(\cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 9\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$\arg(z^2) = -\frac{2\pi}{3}$ (argument principal).

Corrigé de l'exercice 3

Argument et forme trigonométrique

1)

On utilise les valeurs exactes de cos et sin : $z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\, i.$

2)

$|z_1| = 3 \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \frac{5\pi}{6}$ (argument principal).

3)

On rappelle : $|zw| = |z||w|$ et $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$.

Donc $z_1z_2 = 3 \cdot 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + -\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + -\frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

$\arg(z_1z_2) = \frac{2\pi}{3}$ (argument principal).

4)

Par la formule de Moivre : $z_1^3 = 3^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 27\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
$\arg(z_1^3) = \frac{\pi}{2}$ (argument principal).

Corrigé de l'exercice 4

Argument et forme trigonométrique

1)
On utilise les valeurs exactes de cos et sin : $z_1 = 4\left(\cos\left(0\right) + i\sin\left(0\right)\right) = 4$.
2)
$|z_1| = 4 \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = 0$ (argument principal).
3)
On rappelle : $|zw| = |z||w|$ et $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$.
Donc $z_1z_2 = 4\cdot 2\left(\cos\left(0+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
$\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{4}$ (argument principal).
4)
Par la formule de Moivre : $z_1^5 = 4^5\left(\cos\left(5\cdot 0\right) + i\sin\left(5\cdot 0\right)\right) = 1024\left(\cos\left(0\right) + i\sin\left(0\right)\right)$.
$\arg(z_1^5) = 0$ (argument principal).

Corrigé de l'exercice 5

Argument et forme trigonométrique

1)
On utilise les valeurs exactes de cos et sin : $z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\,i$.
2)
$|z_1| = 4 \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ (argument principal).
3)
On rappelle : $|zw| = |z||w|$ et $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$.
Donc $z_1z_2 = 4\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
$\arg(z_1z_2) = -\frac{\pi}{3}$ (argument principal).
4)
Par la formule de Moivre : $z_1^5 = 4^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1024\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
$\arg(z_1^5) = \frac{\pi}{2}$ (argument principal).