Corrigé de l'exercice 1

Racines n-ièmes

1)
$|z_1| = 81 \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \pi$ (argument principal).

2)
Les solutions sont données par : $x_k = \sqrt[4]{81}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, 3)$.

$$\begin{array}{ll}
\arg(x_0) = \frac{\pi + 2\cdot 0\pi}{4} = \frac{\pi}{4} & \Rightarrow\ x_0 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
\arg(x_1) = \frac{\pi + 2\cdot 1\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} & \Rightarrow\ x_1 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
\arg(x_2) = \frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} & \Rightarrow\ x_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
\arg(x_3) = \frac{\pi + 2\cdot 3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} & \Rightarrow\ x_3 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{array}.$$

En réduisant modulo 2π, les arguments principaux des solutions sont : $\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

3)
Par exemple : $\arg(x_1) = \frac{\pi + 2\cdot 1\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$.

4)
Le produit de toutes les solutions d'une équation $x^n = z$ vaut $(-1)^3 z$ (produit des racines du polynôme $X^n - z$).

$\prod_{k=0}^{3} x_k = (-1)^3\, z_1$.

Corrigé de l'exercice 2

Racines n-ièmes

1)
$|z_1| = 27 \quad \text{et} \quad \arg(z_1) = \pi$ (argument principal).

2)
Les solutions sont données par : $x_k = \sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, 2)$.

$$\begin{array}{ll}
\arg(x_0) = \frac{\pi + 2\cdot 0\pi}{3} = \frac{\pi}{3} & \Rightarrow\ x_0 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
\arg(x_1) = \frac{\pi + 2\cdot 1\pi}{3} = \pi & \Rightarrow\ x_1 = 3\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\
\arg(x_2) = \frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} & \Rightarrow\ x_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)
\end{array}.$$

En réduisant modulo 2π, les arguments principaux des solutions sont : $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}\right\}$.

3)
Par exemple : $\arg(x_1) = \frac{\pi + 2\cdot 1\pi}{3} = \pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -3$.

4)
Le produit de toutes les solutions d'une équation $x^n = z$ vaut $(-1)^2 z$ (produit des racines du polynôme $X^n - z$).

$$\prod_{k=0}^{2} x_k = (-1)^2\, z_1.$$

Corrigé de l'exercice 3

Racines n-ièmes

1)
$|w| = 8 \quad \text{et} \quad \arg(w) = \pi$ (argument principal).

2)
Les solutions sont données par : $x_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, 2).$

$$\begin{array}{l}
\arg(x_0) = \dfrac{\pi + 2\cdot 0\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow\ x_0 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \\
\arg(x_1) = \dfrac{\pi + 2\cdot 1\pi}{3} = \pi \quad \Rightarrow\ x_1 = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\
\arg(x_2) = \dfrac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow\ x_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)
\end{array}.$$

En réduisant modulo 2π, les arguments principaux des solutions sont : $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$.

3)
Par exemple : $\arg(x_0) = \frac{\pi + 2\cdot 0\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\, i.$

4)
Le produit de toutes les solutions d'une équation $x^n = z$ vaut $(-1)^2 z$ (produit des racines du polynôme $X^n - z$).

$$\prod_{k=0}^{2} x_k = (-1)^2\, w.$$

Corrigé de l'exercice 4

Racines n-ièmes

1)
$|z| = 16 \quad \text{et} \quad \arg(z) = 0$ (argument principal).

2)
Les solutions sont données par : $x_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, 3).$

$$\begin{array}{l}
\arg(x_0) = \dfrac{0 + 2\cdot 0\pi}{4} = 0 \quad \Rightarrow\ x_0 = 2\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) \\
\arg(x_1) = \dfrac{0 + 2\cdot 1\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow\ x_1 = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \\
\arg(x_2) = \dfrac{0 + 2\cdot 2\pi}{4} = \pi \quad \Rightarrow\ x_2 = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \\
\arg(x_3) = \dfrac{0 + 2\cdot 3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow\ x_3 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)
\end{array}.$$

En réduisant modulo 2π, les arguments principaux des solutions sont : $\left\{\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

3)
Par exemple : $\arg(x_2) = \frac{0 + 2\cdot 2\pi}{4} = \pi \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -2.$

4)
Le produit de toutes les solutions d'une équation $x^n = z$ vaut $(-1)^3 z$ (produit des racines du polynôme $X^n - z$).

$$\prod_{k=0}^{3} x_k = (-1)^3\, z.$$

Corrigé de l'exercice 5

Racines n-ièmes

1)
$|u| = 4 \quad \text{et} \quad \arg(u) = -\frac{2\pi}{3}$ (argument principal).

2)
Les solutions sont données par : $x_k = \sqrt[2]{4}\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right) \quad (k = 0, \ldots, 1).$

$$\begin{aligned}
\arg(x_0) &= \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow\ x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
\arg(x_1) &= \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 1\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow\ x_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}.$$

En réduisant modulo 2π, les arguments principaux des solutions sont : $\left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}$.

3)
Par exemple : $\arg(x_0) = \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 0\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i.$

4)
Le produit de toutes les solutions d'une équation $x^n = z$ vaut $(-1)^1 z$ (produit des racines du polynôme $X^n - z$).

$$\prod_{k=0}^{1} x_k = (-1)^1\, u.$$