Corrigé de l'exercice 1

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 155 &= 1 \times 90 + 65 \\ 90 &= 1 \times 65 + 25 \\ 65 &= 2 \times 25 + 15 \\ 25 &= 1 \times 15 + 10 \\ 15 &= 1 \times 10 + \ \ 5 \\ 10 &= \ \ 2 \times 5 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(155, 90) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 155 et de 90.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$155 \times (+7) + 90 \times (-12) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (7, -12)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$155x + 90y = 5$$

Comme $5 = \gcd(155, 90)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (7, -12)$$

La solution generale est :

$$x = 7 + 18t, \quad y = -12 - 31t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$155 \mid 90n \Longrightarrow 31 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(155, 90) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$155 \mid 90n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 90n = 155k$$

On conclut :

$$31 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 31m$$

Donc $31 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 80 &= 1 \times 45 + 35 \\ 45 &= 1 \times 35 + 10 \\ 35 &= 3 \times 10 + 5 \\ 10 &= 2 \times 5 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(80, 45) = 5$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 80 et de 45.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$80 \times (+4) + 45 \times (-7) = 5$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (4, -7)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$80x + 45y = 5$$

Comme $5 = \gcd(80, 45)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (4, -7)$$

La solution generale est :

$$x = 4 + 9t, \quad y = -7 - 16t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$80 \mid 45n \Longrightarrow 16 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(80, 45) = 5$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$80 \mid 45n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 45n = 80k$$

On conclut :

$$16 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 16m$$

Donc $16 \mid n$.

Corrigé de l'exercice 3

1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 68 &= 2 \times 28 + 12 \\ 28 &= 2 \times 12 + \ \ 4 \\ 12 &= \ \ 3 \times 4 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(68, 28) = 4$$

2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 68 et de 28.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers u et v tels que :

$$68 \times (-2) + 28 \times (+5) = 4$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-2, 5)$$

3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$68x + 28y = 4$$

Comme $4 = \gcd(68, 28)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-2, 5)$$

La solution generale est :

$$x = -2 + 7t, \quad y = 5 - 17t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

4) Application du corollaire de Gauss.

$$68 \mid 28n \Longrightarrow 17 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(68, 28) = 4$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier k tel que :

$$68 \mid 28n \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 28n = 68k$$

On conclut :

$$17 \mid n \iff \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 17m$$

Donc $17 \mid n$.