## Corrigé de l'exercice 1

### 1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 60 &= 1 \times 33 + 27 \\ 33 &= 1 \times 27 + \ \ 6 \\ 27 &= \ \ 4 \times 6 + \ \ 3 \\ 6 &= \ \ 2 \times 3 + \ \ 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(60, 33) = 3$$

### 2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 60 et de 33.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers $u$ et $v$ tels que :

$$60 \times (+5) + 33 \times (-9) = 3$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (5, -9)$$

### 3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$60x + 33y = 3$$

Comme $3 = \gcd(60, 33)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (5, -9)$$

La solution generale est :

$$x = 5 + 11t, \quad y = -9 - 20t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

### 4) Application du corollaire de Gauss.

$$60 \mid 33n \Longrightarrow 20 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(60, 33) = 3$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier $k$ tel que :

$$60 \mid 33n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 33n = 60k$$

On conclut :

$$20 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 20m$$

Donc $20 \mid n$.

## Corrigé de l'exercice 2

### 1) Algorithme d'Euclide.

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 45 &= 1 \times 24 + 21 \\ 24 &= 1 \times 21 + 3 \\ 21 &= 7 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(45, 24) = 3$$

### 2) Théorème de Bezout.

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 45 et de 24.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers $u$ et $v$ tels que :

$$45 \times (-1) + 24 \times (+2) = 3$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-1, 2)$$

### 3) Equation diophantienne.

On considere l'equation :

$$45x + 24y = 3$$

Comme $3 = \gcd(45, 24)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-1, 2)$$

La solution generale est :

$$x = -1 + 8t, \quad y = 2 - 15t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

### 4) Application du corollaire de Gauss.

$$45 \mid 24n \Longrightarrow 15 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(45, 24) = 3$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier $k$ tel que :

$$45 \mid 24n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 24n = 45k$$

On conclut :

$$15 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 15m$$

Donc $15 \mid n$.

## Corrigé de l'exercice 3

**1) Algorithme d'Euclide.**

On effectue les divisions euclidiennes successives :

$$\begin{aligned} 128 &= 2 \times 60 + 8 \\ 60 &= 7 \times 8 + 4 \\ 8 &= 2 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\gcd(128, 60) = 4$$

**2) Théorème de Bezout.**

En remontant les egalites de l'algorithme d'Euclide, on peut exprimer le PGCD comme une combinaison lineaire de 128 et de 60.
D'apres le theoreme de Bezout, il existe donc des entiers $u$ et $v$ tels que :

$$128 \times (-7) + 60 \times (+15) = 4$$

Ainsi, un couple de coefficients de Bezout est :

$$(u, v) = (-7, 15)$$

**3) Equation diophantienne.**

On considere l'equation :

$$128x + 60y = 4$$

Comme $4 = \gcd(128, 60)$, cette equation admet des solutions entieres. Une solution particuliere est :

$$(x_0, y_0) = (-7, 15)$$

La solution generale est :

$$x = -7 + 15t, \quad y = 15 - 32t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

**4) Application du corollaire de Gauss.**

$$128 \mid 60n \Longrightarrow 32 \mid n \qquad \text{avec } d = \gcd(128, 60) = 4$$

Par definition de la divisibilite, il existe un entier $k$ tel que :

$$128 \mid 60n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 60n = 128k$$

On conclut :

$$32 \mid n \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z},\ n = 32m$$

Donc $32 \mid n$.